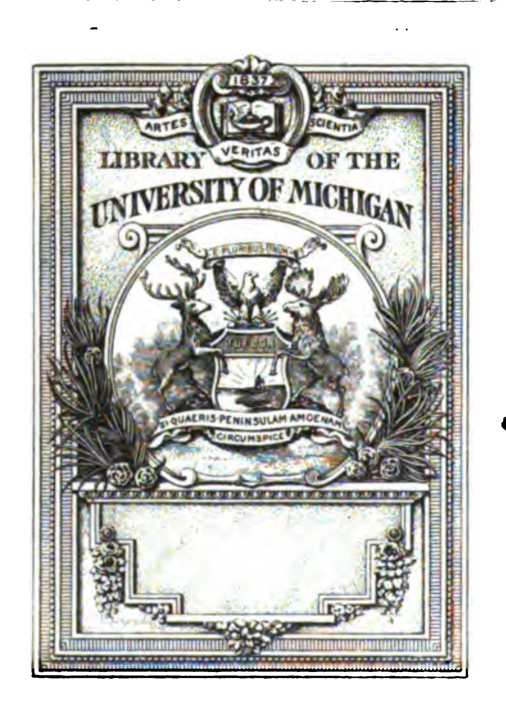



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1850.

On souscrit aussi

A ANGOULÊME..	chez Perez-Lecler.
BORDEAUX...	— Chaumas.
BOURGES.....	— Vermeil.
BREST........	— Mme Vve Lefournier.
LILLE.......	— Vanackère.
LORIENT......	— Leroux-Cassart.
LYON	— Perisse frères. — Brun et Cie.
MARSEILLE...	— Mme Vve Camoin.
METZ........	— Warion.
MONTPELLIER.	— Séwalle.
NANCY.......	— G. Grimblot et Cie.
NANTES......	— Forest aîné. — Guéraud.
ORLÉANS.....	— Gatineau.
RENNES......	— Verdier.
ROCHEFORT...	— Mme Fleury. — Proust-Branday.
ROUEN.......	— Lebrument.
STRASBOURG. .	— Treuttel et Wurtz. — Mme Levrault. — Derivaux.
TOULON......	— Monge et Willamus.
TOULOUSE....	— Mlles Gallon sœurs. — Privat. — Gimet.

LEIPSIG.....	— Michelsen.
LONDRES. ...	— Baillière. — Dulau et Cte, Soho-Square.
MADRID.	— Mme Poupart et frère. — Jaymebon et Cie. — Monier.
TURIN.......	— Bocca.
VIENNE.....	— Rohmann

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès sciences, Professeur aux Écoles Nationales d'Artillerie;

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME NEUVIÈME.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1850.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

THÉORÈMES DE M. STEINER SUR LES CONIQUES INSCRITES A UN TRIANGLE (*);

PAR M. MENTION.

1. Nous nous servirons des notations employées dans les *relations d'identité*. Soit

$$(1) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

l'équation d'une conique où γ est l'angle des axes;

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC),$$

$$\frac{dL}{dA} = l' = E^2 - 4CF, \quad \frac{dL}{dB} = -n = 2BF - DE,$$

$$\frac{dL}{dC} = l = D^2 - 4AF, \quad \frac{dL}{dD} = k' = 2CD - BE,$$

$$\frac{dL}{dE} = k = 2AE - BD, \quad \frac{dL}{dF} = m = B^2 - 4AC,$$

et

$$N = A + C - B\cos\gamma.$$

$\frac{4LN}{m^2}$ égale la somme algébrique des carrés des demi-axes. (*Voir* t. I[er], p. 493.)

(*) Cet article a précédé celui du tome VIII.

2. Soit ABC un triangle; fixons l'origine en A, et prenons AB pour axe des x et AC pour axe des y. Soit $y + ex + f = 0$ l'équation de la droite BC, α, β étant les coordonnées du point d'intersection des trois hauteurs; on a

$$\alpha = \frac{f\cos\gamma}{e}\left(\frac{\cos\gamma - e}{\sin^2\gamma}\right), \quad \beta = \frac{f\cos\gamma}{e}\left(\frac{e\cos\gamma - 1}{\sin^2\gamma}\right).$$

3. *Lemme.* Le lieu des centres d'une conique inscrite dans un triangle donné, et dont la somme algébrique des carrés des axes est constante, est une circonférence ayant pour centre le point de rencontre des trois hauteurs du triangle.

Démonstration. Soient ABC (n° 2) le triangle donné, et (1) l'équation de la conique inscrite; $4\psi^2$ la somme algébrique constante des demi-axes; la conique touchant les axes, on a

$$l = l' = 0.$$

Touchant aussi le côté BC, on a

$$(2) \qquad -2en + mf^2 + 2fk' + 2fek = 0 \qquad \text{(t. II, p. 108)},$$

et

$$\frac{LN}{m^2} = \psi^2.$$

Les relations d'identité donnent

$$k^2 = 4AL, \quad k'^2 = 4CL, \quad kk' + mn = -2BL \quad \text{(t. I}^{\text{er}}\text{, p. 490)}.$$

Faisons

$$\frac{k}{m} = t, \quad \frac{k'}{m} = u;$$

t et u sont les coordonnées du centre de la conique. Ainsi

$$\frac{L}{m^2} = \frac{t^2}{4A}, \quad \frac{C}{A} = \frac{u^2}{t^2};$$

$$(3) \qquad -2e\frac{n}{m}+f^2+2fu+2fet=0;$$

$$ut+\frac{n}{m}=-2B\frac{L}{m^2}=-B\frac{t^2}{A}, \quad -\frac{B}{A}=\frac{ut+\frac{n}{m}}{t^2};$$

$$N=A\left[1+\frac{u^2}{t^2}+\frac{\cos\gamma}{t^2}\left(ut+\frac{n}{m}\right)\right];$$

$$\frac{LN}{m^2}=\frac{1}{4}\left[t^2+u^2+\cos\gamma\left(ut+\frac{n}{m}\right)\right]=\psi^2.$$

Éliminant $\frac{n}{m}$ entre cette dernière équation et l'équation (3), il vient

$$t^2+2ut\cos\gamma+u^2+\frac{2f}{e}u\cos\gamma+2ft\cos\gamma\frac{f^2}{e}\cos\gamma-4\psi^2=0,$$

équation d'un cercle; les coordonnées du centre sont α et β du § 2. C. Q. F. D.

Remarque I. Si la conique est un cercle inscrit au triangle, alors le rayon du lieu est égal à la distance du point de rencontre des hauteurs au centre du cercle inscrit, distance dont nous avons donné l'expression (tome V, page 403).

Remarque II. R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, le carré du rayon du *lieu*, dans le cas général, est $4(R^2\cos A\cos B\cos C+\psi^2)$.

Corollaire. Si $\psi=0$, les coniques deviennent des hyperboles équilatères, d'où :

Théorème. *Le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrits à un triangle est une circonférence dont le centre est au point de rencontre des hauteurs.*

Le carré du rayon de cette circonférence est $\frac{dd'd''}{2R}$; les d sont les distances du point de rencontre des hauteurs aux trois sommets.

Remarque III. Le centre d'une conique tangente a quatre droites, et dont la somme algébrique des carrés des axes est donnée, sera donc fourni par l'intersection de quatre cercles; mais, les centres de ces cercles étant en ligne droite, ils ont une corde commune. D'ailleurs, d'après le théorème de Newton, le centre de la conique se trouve sur la ligne joignant les milieux des trois diagonales du quadrilatère complet; donc :

THÉORÈME. *Dans tout quadrilatère, la droite des points de rencontre des hauteurs, dans les quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère, est perpendiculaire à la ligne qui passe par les milieux des diagonales.*

4. *Lemme.* Le lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle donné, le produit des axes étant constant, est une ligne du troisième degré.

Démonstration. (Voir tome IV, page 491.)

5. THÉORÈME. *Dans un triangle donné, on ne peut inscrire que six coniques* égales *à une conique donnée; les six centres sont à égale distance du point de rencontre des hauteurs du triangle.* STEINER.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des deux lemmes III et V. Un cercle ne peut rencontrer une ligne du troisième degré qu'en six points.

6. THÉORÈME. *A une conique donnée, on ne peut circonscrire que six triangles* égaux *à un triangle donné; les six points de rencontre des hauteurs sont à égale distance du centre de la conique.* STEINER.

Démonstration. Soit T_1 un triangle égal au triangle donné et circonscrit à la conique donnée C_1. Dans le même triangle T_1, on peut inscrire cinq autres coniques C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, égales chacune à la conique C_1 (n° 5). Considérons isolément le triangle T_1 avec chacune des cinq dernières coniques; nous pourrons placer ces cinq

coniques sur la conique C_1, qui aura alors six triangles circonscrits égaux à T_1, et dont les points de rencontre des hauteurs sont à distances égales du centre de la conique. C. Q. F. D.

7. Lorsque $e = o$, le triangle se transforme en deux parallèles coupées par une sécante. Les lieux géométriques n°s 3 et 4 se réduisent à une droite parallèle située à égale distance des deux parallèles, comme cela doit être. Le nombre des solutions du théorème n° 5 se réduit à deux.

8. La ligne des points de rencontre des hauteurs (*Remarque* III) est la directrice de la parabole inscrite au quadrilatère (tome VII, page 253). La ligne des milieux est un diamètre de cette parabole; ce qui démontre le théorème de la *Remarque* III.

PROBLÈME DE TÉTRAGONOMÉTRIE PLANE.

1. Problème. *Trouver une relation entre les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère plan.*

Solution. Soient a, b, c, d les quatre côtés consécutifs; e, f les deux diagonales.

Faisons

$$P = 2a^2b^2 + 2a^2e^2 + 2b^2e^2 - a^4 - b^4 - e^4;$$
$$Q = 2c^2d^2 + 2c^2e^2 + 2d^2e^2 - c^4 - d^4 - e^4;$$
$$R = 2a^2d^2 + 2a^2f^2 + 2d^2f^2 - a^4 - d^4 - f^4;$$
$$S = 2b^2c^2 + 2b^2f^2 + 2c^2f^2 - b^4 - c^4 - f^4;$$

les deux expressions de l'aire du quadrilatère donnent la relation

$$\sqrt{P} + \sqrt{Q} = \sqrt{R} + \sqrt{S}.$$

Faisant disparaître les radicaux, on obtient

$$[P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 - 2(PQ + PR + PS + QR + QS + RS)]^2 = 64\,PQRS;$$

chaque terme est du seizième degré, mais sans exposants impairs (*).

Remarque. Ce problème a été traité par Goldbach (*Correspondance mathématique*, t. I, p. 75; 1736).

2. Pour le trapèze, a et c étant les bases, on obtient

$$b^2 + d^2 + 2ac = e^2 + f^2;$$

et cela à l'aide du théorème d'Euler, que la somme des carrés des quatre côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des diagonales, plus le carré de la double distance des milieux des diagonales.

3. Soit ABCD le quadrilatère. On donne les côtés AB, BC, CD, DA et la diagonale BD; il s'agit de trouver la diagonale AC. Projetons A et C en A′ et C′ sur la diagonale BD; on peut calculer AA′, CC′, A′C′ en fonction des données, et l'on a

$$\overline{AC}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{CC'}^2 + \overline{A'C'}^2;$$

c'est la solution de Goldbach.

QUESTIONS.

217. Soient M un point pris sur une conique, I le point où la normale en M rencontre l'axe focal FF′; élevons en I une perpendiculaire à la normale MI, et soit K le

---

(*) Par une autre méthode, on trouve l'équation suivante

$$c^2f^2(e^2+f^2) - e^2f^2(a^2+b^2+c^2+d^2) + c^2(a^2-d^2)(b^2-c^2) + f^2(a^2-b^2)(d^2-c^2) + (a^2-b^2+c^2-d^2)(a^2c^2-b^2d^2) = 0.$$

(CATALAN.)

point où cette perpendiculaire coupe le rayon vecteur MF; élevons en K une perpendiculaire à ce rayon vecteur, et soit C le point où cette perpendiculaire coupe la normale MI; MC est le rayon de courbure en M.

(PAUL SERRET.)

218. Si l'on substitue r^2 au lieu du rayon vecteur r, et 2ω au lieu de l'angle polaire ω, il est évident qu'on transformera l'équation d'une section conique, rapportée au foyer, dans celle d'une autre, rapportée au centre.

La substitution correspondante, dans la géométrie sphérique, consiste à mettre, dans l'équation d'une courbe entre les coordonnées polaires sphériques ρ et ω, $\sqrt{-1}\left(\text{tang}\,\frac{1}{2}\rho\right)^2$ au lieu de tang $\frac{1}{2}\rho$, et 2ω pour ω.

D'après cette transformation, l'équation d'une sphéro-conique, rapportée au foyer, deviendra celle d'une autre, rapportée au centre.

On sait aussi qu'un cercle, par la substitution dont il s'agit, sera transformé dans une cassinoïde, l'origine étant un point différent du centre. D'une manière analogue, un petit cercle sur la surface d'une sphère sera transformé, par notre formule, dans une cassinoïde sphérique. (STREBOR.)

219. Si l'on coupe par un plan deux angles solides trirectangles ayant même sommet, les six points d'intersection des arêtes avec le plan sont sur une même conique. (STEINER.)

220. Mêmes données; les six faces des deux angles solides touchent un même cône du second degré.

(STEINER.)

221. Soit ABCD un parallélogramme; menons par le point A une transversale quelconque coupant BC en a et CD en a_1. Le rectangle aB.a_1D est constant. (STEINER.)

222. Soient AOB, AO′B deux triangles rectangles en O et O′, I étant un point quelconque pris sur l'hypoténuse AB; le produit tang IOA . tang IO′B est constant.

(STEINER.)

SUR LE CALCUL DE π AVEC 200 DÉCIMALES;

PAR M. ZACHARIAS DAHSE.

(Journal de M. Crelle, t. XXVII, p. 198; 1844.)

M. Dahse, de Hambourg, est le calculateur *de tête* le plus extraordinaire qu'on connaisse. Après avoir parcouru le nord de l'Allemagne, il vint, en 1840, à Vienne pour donner des preuves publiques de son prodigieux talent. Les recettes ne couvrirent pas les frais, et sans quelques protecteurs, il n'aurait pu rester à Vienne. Il suivait les cours de mathématiques élémentaires de M. Schulz Strasznicky, à l'Institut polytechnique. Ce professeur, voulant faire profiter la science de ce talent colossal, employé à des supputations colossales sans but, l'engagea de calculer π. Parmi les diverses formules, M. Dahse choisit celle-ci :

$$\frac{1}{4}\pi = \text{arc tang}\,\frac{1}{2} + \text{arc tang}\,\frac{1}{8} + \text{arc tang}\,\frac{1}{5},$$

et il trouva *de tête* les 200 chiffres suivants :

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971
69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899
86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502
84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196

Les 156 premiers chiffres s'accordent avec un calcul déjà publié en 1822 (Thibaut, *Traité des Mathématiques pures;* 4e édition en allemand). Cela garantit l'exactitude des chiffres restants. On voit que les quatre derniers des 140 chiffres de Véga sont fautifs; au lieu de 26136, il faut 23172.

M. Dahse a mis à peine deux mois à faire ce calcul. M. le baron de Kuhbek, chef éclairé des finances, en ayant entendu parler, donna à ce jeune homme, uniquement dans l'intérêt des sciences, une place dans les chemins de fer, qui ne lui prend que cinq heures par jour. M. Schulz avait proposé d'employer cette faculté admirable à calculer des Tables de fonctions elliptiques. On ne sait ce qu'il en est advenu.

Ludolph van Keulen (mort en 1610) a le premier calculé 20 chiffres de π, dans un ouvrage hollandais : *Van den Cirkel... door Ludolph van Keulen;* Delft, 1596; in-folio. Sous le portrait de l'auteur, on voit un cercle, et sur le diamètre l'unité suivie de 20 zéros; sur le demi-cercle supérieur, on a mis 3 avec 20 chiffres à droite; à côté du dernier chiffre 6, on lit le mot *te cort*, trop court; et sur le demi-cercle inférieur, on a mis 3 avec les mêmes chiffres, à l'exception du dernier, qui est 7, et à côté, *te lank*, trop long. Un autre ouvrage intitulé : *Ludolphi a Ceulen de circulo et adscriptis... e vernaculo latina fecit et notis illustravit Willebrord. Snellius;* R. F.; Leyde, 1619, in-4°, contient le rapport avec le même nombre de chiffres. Mais c'est à tort que la *Biographie universelle* donne cet ouvrage comme une traduction de l'ouvrage précédent. Le troisième ouvrage de Ludolph est encore en hollandais : *De Aritmetische en Geometrische fondamenten;* van M. Ludolph van Keulen; Leyde, 1616; in-folio. Là, il annonce que l'idée lui est venue de pousser plus loin l'approximation, avec le se-

cours de son disciple Pieter Cornelitz. Il donne le rapport avec 32 décimales, et non avec 35, comme dit Montucla; le dernier chiffre 0 est trop faible, et 1 trop fort. C'est ce dernier ouvrage qui a été traduit sous ce titre : *Fundamenta Arithmetica et Geometrica in latinum translata a Will. Snellio*; R. F. Lugd.-Bat., 1615. La traduction a paru une année avant l'original. Van Keulen signifie *de Cologne*, d'où la famille était originaire. Les emblèmes qui entourent l'image de l'auteur semblent indiquer un maître d'armes. En effet, Ludolph ayant engagé Scaliger, dans l'intérêt de sa réputation, de supprimer sa fameuse *Cyclometria*, l'orgueilleux et irascible érudit ne daigna pas lui répondre et se contenta de l'appeler *Pugil*.

Snellius, dans sa *Cyclométrie*, publiée en 1621, dit que Ludolph a poussé l'approximation jusqu'à 34 chiffres, le dernier étant 8 trop faible, ou 9 trop fort, et qu'il a fait mettre cette limite sur son tombeau; mais on ne la trouve pas dans ses ouvrages.

Lagny a calculé avec 127 chiffres (*Mémoires de l'Académie de Paris*, 1719), et Véga avec 140 chiffres; il a trouvé que le 113e chiffre de Lagny était fautif.

PROGRAMME D'UN COURS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE;

PAR M. C.-E. PAGE.

1. La mécanique est la science des mouvements et des forces. On entend par force la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée.

Bien que les corps soient toujours mis en mouvement

par l'action des forces, néanmoins le mouvement en lui-même, c'est-à-dire le simple fait du changement des situations respectives des différents points d'un système, peut être considéré indépendamment des forces qui le produisent; dans ce cas, son étude appartient à la géométrie. Mais si, tout en faisant abstraction des forces, on fait entrer en considération le temps dans lequel le mouvement s'accomplit, c'est-à-dire si l'on introduit l'idée des vitesses étrangères à la géométrie pure, on a une science distincte formant une première branche de la mécanique, et à laquelle Ampère a donné le nom de *cinématique*.

Du mouvement.

2. Nous disons qu'un corps est en mouvement lorsqu'il change de situation par rapport à un système supposé fixe; mais ce système lui-même peut avoir un mouvement qui nous soit inconnu, ou dont nous fassions abstraction.

Lorsque les différents points d'un système sont liés entre eux d'une manière fixe, comme les différents points d'un corps solide par exemple, on peut supposer que ces points sont rapportés à trois axes rectangulaires par rapport auxquels les coordonnées de chaque point restent tout à fait invariables. Il est bien évident que, pour connaître le mouvement de tout le système, il suffira de connaître le mouvement des trois axes auxquels il est rapporté.

Lorsqu'un système de trois axes rectangulaires se meut, il peut arriver que chacun de ces axes reste constamment parallèle à sa première direction, que le système se meuve d'ailleurs en ligne droite ou en ligne courbe : dans ce cas, on dit qu'il y a mouvement de translation seulement; ou bien, il peut arriver que chacun des axes ne reste pas constamment parallèle à une même direction : dans

ce cas, il y a mouvement de rotation. Il est extrêmement important de se faire une idée claire de ces deux espèces de mouvement.

Dans le mouvement de translation, tous les points du système parcourent à chaque instant des lignes égales et parallèles; par suite, le mouvement de tout le système est complétement déterminé quand on connaît le mouvement d'un seul de ses points. Nous commencerons donc par nous occuper du mouvement d'un point.

Mouvement rectiligne uniforme.

3. Le mouvement le plus simple que nous puissions concevoir est celui d'un point qui suit une ligne droite, et qui parcourt des longueurs égales pendant des temps égaux. Ce mouvement est dit *rectiligne et uniforme*.

Lorsque deux points se meuvent d'un mouvement rectiligne et uniforme, et que les longueurs parcourues par chacun d'eux séparément pendant le même temps, ne sont pas égales, on dit qu'ils ont des vitesses différentes. Le rapport de ces vitesses est justement le même que celui des longueurs parcourues pendant le même temps.

Pour comparer les vitesses entre elles, il faut prendre une certaine vitesse pour unité. Si l'on prend pour unité la vitesse du point qui parcourt l'unité de longueur pendant l'unité de temps, une vitesse quelconque aura pour mesure la longueur parcourue pendant l'unité de temps.

Il résulte de la définition même du mouvement uniforme que les chemins parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir; de sorte que si l'on représente par v la vitesse d'un point, c'est-à-dire la longueur parcourue pendant l'unité de temps, on aura, pour le chemin x parcouru pendant le temps t,

$$x = v . t.$$

On peut, au moyen d'une ligne droite, représenter en grandeur et en direction la vitesse dont un point est animé.

On peut encore déterminer par une construction graphique le chemin parcouru pendant un temps t; pour cela, sur une droite indéfinie OX (*Pl. I, fig.* 1), à partir d'un point fixe O, portons une longueur OT, qui contienne l'unité de longueur autant de fois que le temps t contient l'unité de temps; par le point O, élevons une perpendiculaire Om égale à la vitesse v, et construisons un rectangle sur ces deux droites : nous aurons, pour la surface de ce rectangle,

$$Om . OT = v . t.$$

Donc le rectangle contient l'unité de surface autant de fois que le chemin parcouru contient l'unité de longueur.

Composition des vitesses.

4. Les deux axes ox, oy (*fig.* 2), formant un système mobile, se meuvent d'un mouvement de translation, c'est-à-dire en restant constamment parallèles à eux-mêmes dans le plan des axes fixes OX, OY. Le mouvement est rectiligne et uniforme; la vitesse est représentée en grandeur et en direction par la droite OC. Un point mobile placé en A est animé, par rapport aux axes mobiles ox, oy, d'une vitesse représentée en grandeur et en direction par la droite Aq; cherchons quelle est la vitesse du point mobile par rapport au système fixe.

En vertu de la vitesse du système, le point A parcourant pendant l'unité de temps une droite Ap égale et parallèle à OC, la droite Aq se trouve transportée parallèlement à elle-même en pR, et le point mobile parcourant cette droite se trouve en R. Les chemins parcourus parallèlement à Aq sont évidemment dans le même rapport

que ceux parcourus suivant Aq; d'où il suit que le point mobile reste constamment sur la droite AR, qui représente en grandeur et en direction la vitesse résultante. Les deux vitesses Ap et Aq se nomment *vitesses composantes*. La résultante serait exactement la même en supposant le système animé de la vitesse Aq, et le point animé de la vitesse Ap. Le point mobile peut être considéré comme animé de deux vitesses ayant des directions différentes.

On a donc ce théorème fondamental : *La résultante de deux vitesses est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses composantes.*

On peut supposer le point animé d'autant de vitesses différentes que l'on voudra. Pour cela, il suffit de concevoir un second système animé d'une certaine vitesse par rapport au premier, et ainsi de suite. En substituant à deux de ces vitesses leur résultante, on aura une composante de moins; en continuant de la même manière, on finira par obtenir la résultante de toutes ces vitesses.

La construction et la démonstration sont exactement les mêmes en supposant les vitesses dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, au lieu d'être dans un même plan.

Il est facile de démontrer que la résultante de trois vitesses, dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur les trois vitesses composantes.

Par la même raison qu'on peut composer trois vitesses en une seule, on peut décomposer une vitesse en trois autres. On a coutume de faire cette décomposition suivant trois axes rectangulaires : chacune des composantes est la projection de la résultante sur l'axe correspondant.

Mouvement varié.

5. Dans le mouvement uniforme, la vitesse reste constante; mais on peut très-bien concevoir qu'elle change pendant le mouvement et varie suivant une certaine loi avec le temps. Quand deux quantités sont ainsi liées entre elles, de manière que lorsqu'une d'elles varie, l'autre varie aussi, on dit qu'elles sont fonction l'une de l'autre. Nous supposerons donc la vitesse fonction du temps, et nous chercherons la solution de ce problème : *Étant donnée la loi suivant laquelle la vitesse varie en fonction du temps, déterminer les chemins parcourus à chaque instant.*

Pour cela, sur une droite infinie aX (*fig.* 3), à partir d'un point fixe a, portons des longueurs proportionnelles aux temps (en prenant une unité de longueur pour chaque unité de temps); par le point a élevons une perpendiculaire ab, justement égale à la vitesse du point mobile à l'origine du mouvement; puis, supposons que cette perpendiculaire glisse le long de la droite aX, en variant de longueur suivant la même loi que la vitesse.

L'extrémité de la perpendiculaire mobile décrit une certaine ligne courbe, dont la forme représente la loi suivant laquelle la vitesse varie, et la perpendiculaire elle-même engendre une portion de surface comprise entre la droite aX et la courbe $bb'b''$,... qui est justement égale au chemin parcouru pendant le temps correspondant.

En effet, supposons que la vitesse, au lieu de varier d'une manière continue, reçoive des accroissements brusques à des intervalles sensibles, le mouvement sera uniforme entre deux accroissements consécutifs, et le chemin parcouru pendant un de ces intervalles sera représenté par la surface d'un petit rectangle ayant pour base la longueur qui représente l'instant correspondant, et pour

hauteur la perpendiculaire qui représente la vitesse au commencement de cet instant. Le chemin total parcouru pendant un certain nombre de ces instants sera représenté par la somme des rectangles correspondants.

Il est facile de se convaincre que plus les intervalles qui séparent les accroissements successifs deviennent petits, plus la somme des rectangles qui représente le chemin parcouru s'approche de se confondre avec la surface terminée par la courbe; d'où l'on peut conclure qu'à la limite, lorsque la vitesse varie d'une manière continue, le chemin parcouru se trouve rigoureusement représenté par cette surface.

La question se trouve donc ramenée à mesurer la portion de surface limitée par deux perpendiculaires extrêmes et comprise entre la droite et la courbe.

Quelquefois la nature de la courbe permet d'obtenir une expression rigoureuse de cette mesure; mais, dans tous les cas, on peut la calculer avec autant d'approximation qu'on veut.

Soit abb_6a_6 (*fig.* 3) la portion de surface à mesurer : on divise la base aa_6 en un certain nombre de parties égales; par chaque point de division, on élève une perpendiculaire. Chaque petit arc de courbe compris entre deux perpendiculaires peut être considéré comme une droite; par suite, chaque portion de surface peut être considérée comme un trapèze. On a donc pour la somme de ces trapèzes

$$\frac{1}{2}aa_1(a'b' + 2a''b'' + 2a'''b''' + 2a^{\text{IV}}b^{\text{IV}} + \ldots + a^{\text{VI}}b^{\text{VI}}).$$

Il est évident que cette expression est d'autant plus approchée que l'intervalle aa' est plus petit.

Mouvement uniformément varié.

6. Le cas le plus simple du mouvement varié est celui dans lequel la vitesse croît proportionnellement au temps. Ce mouvement est appelé *uniformément varié*.

Soit OX (*fig.* 4) la droite sur laquelle on porte des longueurs proportionnelles aux temps : à l'origine, la vitesse est nulle ; au bout d'une seconde, elle est représentée par la perpendiculaire ab, que nous appellerons g ; au bout de deux secondes, elle est $2g$, etc. Enfin, au bout du temps T, on a pour la vitesse acquise

$$v = gT.$$

Puisque la perpendiculaire varie proportionnellement au temps, son extrémité engendre la droite obr, et le chemin x, parcouru au bout du temps T, a pour mesure la surface d'un triangle dont la base est égale à T et la hauteur à v : donc

$$x = \frac{1}{2} vT ;$$

par suite,

$$x = \frac{1}{2} gT^2.$$

7. Par conséquent, dans le mouvement uniformément varié, le chemin parcouru au bout d'un certain temps T est égal au chemin parcouru pendant le même temps avec une vitesse moitié de la vitesse acquise au bout de ce temps. De plus, les chemins parcourus sont entre eux comme les carrés des temps employés à les parcourir. C'est ce qui résulte immédiatement de la construction. En effet, les chemins x et x', correspondants aux temps T et T', sont représentés par les surfaces des triangles semblables dont T et T' sont les bases, et ces surfaces sont comme les carrés des bases.

Il est facile de voir que si, à l'origine, la vitesse, au lieu d'être nulle, était égale à V, on aurait

$$v = V + gT, \quad x = VT + \frac{1}{2} gT^2.$$

Si, au lieu d'être croissante, la vitesse était décroissante, on aurait

$$v = V - gT,$$

et

$$x = VT - \frac{1}{2} gT^2.$$

Mouvement curviligne.

8. Lorsqu'un point est animé d'un mouvement varié par rapport à un système mobile, et que ce système est lui-même animé d'un mouvement uniforme ou varié par rapport à un système fixe, le point décrit une ligne courbe.

Par exemple, le système mobile ox, oy (*fig.* 5) est animé, par rapport au système fixe OX, OY, d'un mouvement rectiligne et uniforme ; la vitesse est représentée en grandeur et en direction par la droite OK. Un point mobile, primitivement situé en A, est animé, par rapport au système mobile ox, oy, d'un mouvement uniformément varié, dirigé suivant Aq; la vitesse g, acquise au bout de l'unité de temps, étant égale à Ap, cherchons le chemin décrit par le point mobile par rapport au système fixe.

En vertu du mouvement uniforme du système, le point A parcourt sur la droite AZ, parallèle à OK, des longueurs proportionnelles aux temps. La droite Aq se trouve transportée parallèlement à elle-même, tandis que le point mobile parcourt sur cette droite des longueurs proportionnelles aux carrés du temps. Il s'ensuit que les dis-

tances $A'q'$, $A''q''$, etc., mesurées parallèlement à Aq, sont entre elles comme les carrés des distances AA', AA'', etc., mesurées sur AZ. Cette condition suffit pour déterminer la courbe, et la fait reconnaître pour une parabole.

Il serait facile de multiplier les exemples de ce mode de génération des courbes.

De la tangente.

9. Lorsqu'un point se meut en ligne courbe, sa vitesse change à chaque instant de direction. Cette vitesse est la résultante des vitesses dont le point est animé. Par conséquent, on peut la construire quand on connaît le mode de génération de la courbe. La droite qui indique la direction de la résultante est la tangente. De là résulte un moyen commode de construire la tangente. Cette construction est connue sous le nom de *méthode des tangentes de Roberval.*

Dans la courbe que nous venons de déterminer, construisons la tangente au point *m* (*fig.* 5); la vitesse du point mobile suivant *mc*, parallèle à AZ, est constante et égale à OK. La vitesse suivant *mb*, parallèle à Aq, est double de *mi*; car nous savons que, dans le mouvement uniformément varié, la vitesse acquise est représentée par une longueur double du chemin parcouru (7). Construisons le parallélogramme sur les droites *mi* et *mb*; la diagonale *m*R est la tangente.

Mouvement de rotation.

10. Le mouvement de rotation le plus simple que nous puissions concevoir est celui d'un système qui tourne autour d'un axe fixe OZ (*fig.* 6).

Chaque point décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et le centre situé sur cet axe.

Lorsqu'un point se meut en ligne courbe, sa vitesse est constamment dirigée suivant la tangente à cette courbe Par conséquent, la vitesse d'un point quelconque A du système est dirigée perpendiculairement au rayon OA et à l'axe OZ.

Tous les points, étant liés entre eux d'une manière invariable, décrivent à chaque instant des arcs semblables. Comme leurs vitesses sont dans le rapport des arcs qu'ils décrivent en même temps, et que ces arcs sont dans le rapport des rayons, il s'ensuit que les vitesses de s différents points sont entre elles comme les distances de ces points à l'axe.

Il suit de là que si l'on représente par ω la vitesse du point dont la distance à l'axe est égale à l'unité de longueur, on aura $r.\omega$ pour la vitesse d'un point dont la distance à l'axe est r.

Cette vitesse ω du point dont la distance à l'axe est égale à l'unité se nomme *vitesse angulaire*.

La rotation autour d'un axe fixe est parfaitement déterminée pour un instant donné, quand on connaît la vitesse angulaire correspondante et le sens de la rotation.

La vitesse angulaire s'indique en portant sur l'axe, à partir d'un point fixe O, une longueur proportionnelle à cet axe. Le sens de la rotation s'indique par le sens dans lequel on convient de porter cette longueur comme positive à partir de l'origine. Ainsi, par exemple, on conviendra qu'en se supposant placé suivant l'axe, les pieds à l'origine, les points du système doivent paraître marcher de droite à gauche.

D'après cette convention, les longueurs étant comptées comme positives du point O vers le point Z, le mouvement aurait lieu dans le sens indiqué par la flèche. Pour indiquer une rotation en sens contraire, il suffirait de porter l'axe en sens contraire suivant OY.

Composition des vitesses angulaires, axe instantané.

11. Supposons qu'un corps tourne autour de l'axe op (*fig.* 7) avec une vitesse angulaire ω proportionnelle à la longueur op, tandis que le plan poq tourne autour de l'axe oq avec une vitesse angulaire ω' proportionnelle à la longueur oq, de sorte qu'on ait

$$\omega : \omega' :: op : oq.$$

Cherchons quelles sont les vitesses des différents points du système. Pour cela, considérons un de ces points m au moment où il passe dans le plan poq; abaissons sur les axes les perpendiculaires mb et ma.

En vertu de la rotation autour de l'axe op, le point m est animé d'une vitesse $mb.\omega$ perpendiculaire au plan poq. En vertu de la rotation autour de l'axe oq, le point m est animé d'une vitesse $ma.\omega'$ perpendiculaire au plan poq; de plus, tant que le point m est situé dans l'angle poq, ces deux vitesses sont dirigées en sens contraire. On a donc, pour la vitesse du point m,

$$v = ma.\omega' - mb.\omega.$$

Cette vitesse est nulle lorsque les perpendiculaires mb et ma sont en raison inverse des vitesses angulaires. Or il est facile de voir que le lieu des points qui satisfont à cette condition est la diagonale OR du parallélogramme construit sur les axes op et oq.

En effet, du point R abaissons sur les axes les perpendiculaires Ri et RG; les triangles semblables nous donnent

$$Ri : Rg :: oq : op :: \omega' : \omega,$$

donc

$$Ri.\omega - Rg.\omega' = 0.$$

Les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la diagonale, indéfiniment prolongée, sont dans le même

rapport ; donc, tous les points situés sur la direction de cette diagonale ont une vitesse nulle.

Tous les points situés sur une même droite parallèle à la diagonale OR ont des vitesses égales et parallèles : en effet, par le point m menons md parallèle à OR ; par le point d, où elle rencontre l'axe op, menons dc parallèle à oq : nous aurons

$$ma = mc + ca,$$

d'où, pour la vitesse du point m,

$$v = mc.\omega' - mb.\omega + ca.\omega'.$$

Or, à cause des triangles semblables, et d'après ce qui vient d'être démontré, on a

$$mc.\omega' - mb.\omega = 0;$$

donc

$$v = ca.\omega'.$$

La longueur ca reste évidemment la même pour tous les points situés sur md.

Deux points situés à des distances égales de part et d'autre de la diagonale ont des vitesses égales et dirigées en sens contraire.

En effet, considérons un point n de l'axe op (*fig.* 8) et un point m du corps mobile au moment où il rencontre l'axe oq ; prenons les distances om et on proportionnelles aux axes, de sorte qu'on ait

$$om : on :: oq : op.$$

Les perpendiculaires ma et nb, abaissées sur la diagonale, sont égales.

Des points m et n abaissons sur les axes les perpendiculaires mc et nd ; les triangles semblables donnent

$$mc : nd :: om : on :: oq : op :: \omega' : \omega,$$

d'où

$$mc.\omega = nd.\omega'.$$



Mais $mc.\omega$ est la vitesse du point m, et $md.\omega'$ la vitesse du point n, et ces vitesses sont dirigées en sens contraires.

De tout ce qui précède, il résulte évidemment que les vitesses de tous les points du mobile situés dans le plan poq sont les mêmes que si la rotation avait uniquement lieu autour d'un axe dirigé suivant la diagonale OR.

Il ne reste plus qu'à déterminer la vitesse angulaire autour de cet axe; représentons cette vitesse par Ω. Du point p abaissons sur la diagonale et sur l'axe oq les perpendiculaires pk et ph; la vitesse du point p sera $pk.\Omega$. D'un autre côté, nous avons pour la vitesse de ce même point $ph.\omega'$; donc

$$ph.\omega' = pk.\Omega,$$

d'où

$$\Omega : \omega' :: ph : pk.$$

Or $ph = gk$, et les triangles semblables ORg, pkR donnent

$$Rg : pk :: OR : oq;$$

donc

$$\Omega : \omega' :: OR : oq.$$

Ce qui fait voir que la vitesse angulaire Ω est proportionnelle à la longueur de la diagonale OR.

Les points que nous avons considérés dans le plan poq, étant invariablement liés avec tous les autres points du mobile, les entraînent avec eux dans leur mouvement; nous pouvons donc conclure ce théorème :

Si un corps tourne autour d'un premier axe, tandis que cet axe lui-même tourne autour d'un second, les vitesses de tous les points du mobile à un instant donné sont les mêmes que si, à cet instant, le mobile tournait uniquement autour d'un axe représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux premiers.

12. Le corps tourne autour de l'axe *op*; par conséquent, les points de ce corps qui passent dans le plan *poq* changent à chaque instant. Le plan *poq* tourne lui-même autour de l'axe *oq*; il en résulte que l'axe OR, qui est toujours situé dans ce plan, se déplace continuellement dans l'intérieur du corps mobile et dans l'espace: pour cette raison, on l'a nommé *axe instantané de rotation*.

Si les mouvements de rotation sont uniformes, c'est-à-dire si les vitesses angulaires ω et ω' restent constantes, la diagonale OR fait constamment le même angle avec l'axe fixe *oq*, en tournant autour de lui elle engendre un cône droit à base circulaire qui est fixe dans l'espace. Elle fait aussi constamment le même angle avec l'axe mobile *op*, et comme tous les points du corps viennent passer successivement dans le plan, elle trace dans l'intérieur du corps la surface d'un second cône droit à base circulaire dont le sommet coïncide avec le sommet du cône fixe.

Si l'on suppose tous les points du mobile liés à la surface du second cône; puis si l'on suppose que ce cône roule sans glisser sur le cône fixe, on aura une représentation exacte du mouvement. On voit qu'à chaque instant, le système tourne autour de l'arête de contact des deux cônes; cette arête est justement l'axe instantané de rotation : on voit clairement comment cet axe se déplace continuellement dans l'espace et dans l'intérieur du système mobile.

Si les rotations autour des deux axes ne sont pas uniformes, les vitesses angulaires ω et ω' variant à chaque instant, les angles que la diagonale fait avec les axes varient en même temps. L'axe instantané décrit encore deux surfaces coniques, l'une fixe dans l'espace, l'autre dans l'intérieur du système mobile; mais ces deux surfaces ne sont plus des cônes droits à bases circulaires : néanmoins, on a toujours une représentation complète

du mouvement, en supposant que le cône mobile roule sans glisser sur le cône fixe.

13. Lorsqu'on sait trouver la résultante des vitesses angulaires de rotation autour de deux axes, on peut trouver la résultante des vitesses angulaires autour d'autant d'axes qu'on voudra.

Supposons (*fig.* 9) qu'un corps tourne autour d'un axe op, tandis que cet axe tourne autour d'un second axe oq et que ce second tourne autour d'un troisième on.

Faisons abstraction de la rotation autour de on; nous aurons un axe instantané représenté par la diagonale os. En composant la vitesse angulaire autour de cet axe avec la vitesse angulaire autour de on, nous aurons un axe instantané représenté par la diagonale OR du parallélipipède construit sur les trois axes op, oq, on.

Il est facile de voir que l'axe instantané engendre encore deux surfaces coniques, et qu'on a une représentation complète du mouvement en faisant rouler une de ces surfaces sur l'autre.

DÉRIVÉES DES DIVERS ORDRES DE DEUX FONCTIONS SIMPLES CIRCULAIRES, ET LEURS APPLICATIONS;

Par M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Professeur de mathématiques, à Paris.

Problème I. *Trouver l'expression analytique de la dérivée d'un ordre quelconque de la fonction simple circulaire*

$$y = \text{arc tang}\, x.$$

Solution. Calculons plusieurs dérivées de la fonction donnée que nous exprimerons en fonction de y; puis, en ayant égard, pour certaines transformations, aux pre-

mières formules de la trigonométrie rectiligne, nous reconnaîtrons que l'on a les relations suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = \cos y \cos\left(y + 0 . \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 . \cos^2 y \cos\left(2y + 1 . \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 1 . 2 \cos^3 y \cos\left(3y + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 1 . 2 . 3 \cos^4 y \cos\left(4y + 3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 1 . 2 . 3 . 4 \cos^5 y \cos\left(5y + 4\frac{\pi}{2}\right).$$

Nous pourrions calculer encore plusieurs autres dérivées ; mais celles que nous venons de former suffisent pour mettre en évidence, dès la dérivée du second ordre inclusivement, leur loi de formation. Cette loi, qu'on peut traduire aisément en langage ordinaire, est exprimée analytiquement par la relation

$$\frac{d^my}{dx^m} = 1 . 2 . 3 \ldots (m-1) \cos^m y \cos\left(my + \overline{m-1} . \frac{\pi}{2}\right) \text{ (*)}.$$

Je dis que cette loi déduite de l'analogie est la loi générale de formation de toutes les dérivées de la fonction donnée, à partir de la seconde.

En effet, supposons que cette loi ait été vérifiée jusqu'à la dérivée de l'ordre m inclusivement, et calculons la dérivée de l'ordre $m+1$; il vient

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = - 1 . 2 . 3 \ldots m \cos^{m+1} y$$

$$\left[\sin y \cos\left(my + \overline{m-1} . \frac{\pi}{2}\right) + \cos y \sin\left(my + \overline{m-1} . \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= - 1 . 2 . 3 \ldots m \cos^{m+1} y \sin\left(\overline{m+1} . y + \overline{m-1} . \frac{\pi}{2}\right).$$

(*) Cette formule se trouve (sauf la notation) dans les *Problèmes de Calcul différentiel*, par M. Léonce Clarke (page 21).

Mais si l'on observe que l'on a l'égalité

$$\sin\left(\overline{m+1}\,.y+\overline{m-1}\,.\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\overline{m+1}\,.y+m\frac{\pi}{2}\right),$$

on pourra écrire

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}=1.2.3\ldots m\cos^{m+1}y\cos\left(\overline{m+1}\,.y+m\frac{\pi}{2}\right).$$

Ce qui montre que la dérivée de l'ordre $m+1$ se forme identiquement d'après la loi qui a servi à écrire la dérivée de l'ordre m. Donc, en sous-entendant le raisonnement connu, il est vrai de dire que cette loi est générale.

Scolies. Nous avons fait remarquer que cette loi générale ne donne pas la première dérivée. On peut, cependant, en y introduisant une légère modification, la rendre telle, qu'elle donne toutes les dérivées sans exception. Il suffit, pour cela, de multiplier le coefficient de la dérivée de l'ordre m par $\frac{m}{m}$; ce qui n'en change pas la valeur numérique. Nous ferons remarquer encore que si l'on fait tour à tour $x=\pm\infty$, et $x=0$, dans l'équation donnée, on trouve respectivement $y=\frac{\pi}{2}$, et $y=0$. Ce qui montre que, dans le premier cas, toutes les dérivées sont nulles, et que, dans le second, il n'y a que les dérivées d'ordre pair qui le soient.

Corollaire. Si l'on avait à trouver la dérivée de l'ordre m de la fonction circulaire monôme

$$y=\text{A arc tang}\,\alpha x,$$

A et α désignant des quantités indépendantes de x, on trouverait immédiatement que l'on a

$$\frac{d^m y}{dx^m}=1.2.3\ldots(m-1)\,\text{A}(\alpha\cos y)^m\cos\left(my+\overline{m-1}\,.\frac{\pi}{2}\right).$$

Observation. Lorsque nous avons trouvé la solution du problème ci-dessus, nous ignorions qu'Arbogast eût

donné une autre solution du même problème dans son *Calcul des dérivations*, publié en 1800. Je dois ce renseignement bibliographique à M. le redacteur des *Nouvelles Annales*. Arbogast, dans l'ouvrage que nous venons de citer, donne, à la page 316, pour dérivée d'un ordre quelconque de la fonction arc tang x,

$$\frac{d^{n+1}(\text{arc tang}\,x)}{dx^{n+1}} = \mp 1.2.3\ldots n \frac{2^n x^n}{(1+x^2)^{n+1}}$$

$$\left[\begin{array}{l} 1-(n-1)\dfrac{1+x^2}{2^2x^2}+\dfrac{(n-2)(n-3)}{1.2}\dfrac{(1+x^2)^2}{2^4x^4} \\ -\dfrac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}\dfrac{(1+x^2)^3}{2^6x^6}+\ldots \end{array}\right];$$

dans $\mp$, le signe supérieur est pour n impair, et l'inférieur est pour n pair.

Pour obtenir cette formule, Arbogast fait l'application d'une méthode qui donne la dérivée d'un ordre quelconque d'une fonction monôme ou polynôme, sans qu'il soit, pour cela, nécessaire de passer par les dérivées des ordres inférieurs (*).

PROBLÈME II. *Développer la fonction arc tang x suivant les puissances croissantes, entières et positives de x.*

Solution. En ayant égard au problème précédent, on trouve que

$$\text{arc tang}\,x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \text{R}.$$

Dans cette relation, la quantité $\pm\text{R}$ désigne le reste de la série. Ce reste, calculé d'après la formule de M. Cauchy, donne, en réduisant,

$$\pm\text{R} = \pm x \cos y_1 [x(1-\theta)\cos y_1]^{m-1} \cos\left(my + \overline{m-1}\,.\frac{\pi}{2}\right);$$

d'après une remarque faite ci-dessus, m est toujours

(*) Méthode d'une extrême importance et toutefois peu étudiée. TM.

impair. On prend R avec le signe *plus*, ou avec le signe *moins*, selon que le résidu de l'ordre de la dérivée, par 4, est égal à *plus un*, ou à *moins un*. θ désigne une quantité positive plus petite que l'unité, et y désigne ce que devient arc tang x, lorsqu'on y remplace x par θx.

Cherchons les conditions pour que la série ci-dessus, prolongée à l'infini, soit convergente. Remarquons que ses termes sont alternativement positifs et négatifs; dès lors, il faut chercher les conditions pour qu'ils décroissent indéfiniment. A cet effet, désignons par u_p, u_{p+1} les deux termes consécutifs de cette série et dont les rangs sont p, $p+1$. On a

$$u_p = \pm \frac{x^{2p-1}}{2p-1}, \quad u_{p+1} = \mp \frac{x^{2p+1}}{2p+1};$$

les signes supérieurs se correspondent ainsi que les signes inférieurs: d'où

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = -x^2\left(1 - \frac{2}{2p+1}\right).$$

La quantité entre parenthèses est toujours comprise entre o et $+1$; elle n'est égale à $+1$ que pour $p = \infty$ Donc, pour que les termes de la série aillent en décroissant indéfiniment, lorsque p croît sans limite, il faut et il suffit que x ne soit pas en dehors des limites $+1$ et -1. Dès lors, si x remplit cette condition, la série prolongée à l'infini est convergente, d'après un théorème connu; elle est encore convergente pour les valeurs particulières

$$x = +1, \quad x = -1.$$

Cela posé, pour que la série prolongée à l'infini ait pour somme arc tang x, les valeurs de x n'étant pas en dehors de $+1$ et -1, il est nécessaire de démontrer que pour $m = \infty$ on a

$$\lim(\pm R) = 0.$$

Or, d'après la forme sous laquelle nous avons présenté le reste de la série, on voit que cette condition sera toujours satisfaite, si la valeur absolue de

$$x(1-\theta)\cos y_1 < 1,$$

ou si celle de x est <1. Mais cette dernière inégalité est évidemment satisfaite pour toutes les valeurs de x comprises entre $+1$ et -1; donc pour x, pris dans les mêmes limites, la série ci-dessus, prolongée à l'infini, a pour somme arc tang x, et l'on peut écrire, avec certitude,

$$(1)\qquad \text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ à l'infini.}$$

Cette formule est encore exacte pour les valeurs particulières $x=+1$, $x=-1$, parce que le second membre reste convergent pour ces deux valeurs de x.

Historique. La formule (1), très-remarquable par sa simplicité et par ses applications, a été donnée par Godefroy-Guillaume Leibnitz, au commencement de l'année 1674, pendant le séjour qu'il fit à cette époque à Paris.

Observations. On peut arriver à la formule de Leibnitz en faisant usage des quantités imaginaires : 1° en employant la formule qui donne la tangente d'un arc en fonction d'exponentielles imaginaires; 2° en suivant une méthode due à M. Cauchy.

Corollaire. On peut transformer la formule de Leibnitz en une autre qui convienne aux valeurs des tangentes qui sont en dehors des limites $+1$ et -1.

En effet, on a, quel que soit x,

$$\text{arc tang}\, x + \text{arc tang}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\text{arc tang}\, x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\, \frac{1}{x}.$$

x étant supposé en dehors de $+1$ et -1, il s'ensuit que $\frac{1}{x}$ est renfermé dans ces mêmes limites; par conséquent, on peut développer arc tang $\frac{1}{x}$ d'après la formule de Leibnitz, et il vient

$$(2) \qquad \text{arc tang}\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots \text{ à l'infini.}$$

La formule (1) ne donne que des arcs compris entre o et $+\frac{\pi}{4}$ ou entre o et $-\frac{\pi}{4}$; la formule (2) ne donne que des arcs compris entre $+\frac{\pi}{4}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ou entre $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Par suite, ces deux formules serviront à connaître la grandeur d'un arc qui sort de ces limites, si l'on donne le nombre de fois que cet arc contient $\frac{\pi}{2}$, ainsi que le résidu de cette division.

Problème III. *Trouver le développement de* arc tang$(x+h)$, *ordonné suivant les puissances croissantes, entières et positives de h.*

Nous nous dispenserons de développer la solution de ce problème; nous nous bornerons à dire que l'on fait usage du problème I, et que le raisonnement est semblable à celui du problème II.

Problème IV. *Trouver l'expression analytique de la dérivée d'un ordre quelconque, de la fonction simple circulaire*

$$y = \text{arc cot}\, x.$$

Solution. Par un calcul et par des transformations

analogues à ceux que l'on a employés dans le problème I, on trouve que l'on a

$$\frac{dy}{dx} = (-1)^1 \sin y \sin y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (-1)^2 . 1 \sin^2 y \sin 2y,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (-1)^3 . 1 . 2 \sin^3 y \sin 3y,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = (-1)^4 . 1 . 2 . 3 \sin^4 y \sin 4y,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = (-1)^5 . 1 . 2 . 3 . 4 \sin^5 y \sin 5y.$$

En comparant les expressions de ces dérivées, on voit, à partir de la seconde, qu'elles se forment d'après une loi très-simple, dont l'expression analytique est

$$\frac{d^my}{dx^m} = (-1)^m . 1 . 2 . 3 \ldots (m-1) \sin^m y \sin my.$$

En supposant que cette loi ait été vérifiée jusqu'à la dérivée de l'ordre m inclusivement, il sera facile de démontrer que la dérivée de l'ordre $m+1$ se forme de la même manière que la dérivée de l'ordre m; par conséquent, cette loi est générale, et la dernière relation écrite ci-dessus donne la réponse au problème.

Scolies. Ils sont analogues à ceux du problème I.

Corollaire. Si la fonction donnée était de la forme

$$y = \text{A arc cot} \alpha x,$$

A et α désignant des quantités indépendantes de x, on trouverait la relation

$$\frac{d^my}{dx^m} = (-1)^m . 1 . 2 . 3 \ldots (m-1) \text{A} (\alpha \sin y)^m \sin my.$$

Problème V. *Trouver le développement de la fonction*

$$y = \text{arc cot}\, x,$$

suivant les puissances croissantes, entières et positives de x.

Solution. On peut opérer directement en s'aidant du problème IV; mais, si l'on remarque que l'on a l'égalité

$$\text{arc tang}\, x + \text{arc cot}\, x = \frac{\pi}{2},$$

la question se trouve tout de suite résolue en vertu du problème II.

NOTE SUR LA THÉORIE DES PARALLÈLES;

Par M. E. LIONNET,
Professeur au lycée Louis-le-Grand.

La figure au moyen de laquelle M. Camillo Minarelli veut prouver que la somme des angles d'un triangle n'est pas moindre que deux angles droits (*), suppose que le point B_1 est situé dans l'angle BDK, que le point B_2 est situé dans l'angle B_1D_1K, et ainsi de suite; c'est ce qu'il faudrait d'abord démontrer. On fait disparaître cette objection en supposant les droites BD_1, B_1D_2, B_2D_3, ... perpendiculaires à DK; mais alors il faudrait démontrer que le point D_2 n'est pas situé entre D et D_1, que le point D_3 n'est pas situé entre D et D_2, et ainsi de suite.

Note. MM. Lebesgue, Breton (de Champ) et Finck nous ont adressé la même objection. Il est difficile de la rendre visible sans *courber* les droites.

(*) *Nouvelles Annales*, année 1849, page 313.

COMPOSITIONS ÉCRITES POUR L'ADMISSION A L'ECOLE POLYTECHNIQUE, 1849

(voir t. VIII, p. 383).

A Lyon.

1°. Lieu des projections du sommet d'une parabole sur ses tangentes; trouver ses asymptotes.

2°. Poids spécifiques, instruments propres à les déterminer.

3°. Construire la courbe d'intersection de deux cylindres ayant deux plans tangents communs, et lui mener une tangente en un point donné.

A Douai.

1°. Conditions de similitude de deux courbes en général; théorie des levers des plans par la géométrie et la trigonométrie.

Lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote commune et une directrice commune.

2°. Miroirs et lentilles sphériques.

Carbone, ses propriétés et son extraction.

3°. La droite AB étant donnée dans le plan vertical et la droite CD dans le plan horizontal, on suppose que cette dernière droite tourne autour de la première, elle engendre ainsi un hyperboloïde de révolution; déterminer l'intersection de cette surface avec une droite perpendiculaire au plan vertical, et mener par l'un des points d'intersection un plan tangent à la surface.

A Strasbourg.

1°. Construction des racines des équations des 2e, 3e et 4e degrés en les ramenant à la construction d'un cercle et d'une courbe du 2e degré.

2°. Soient un angle ABC ; A, C deux points pris sur ses côtés ; par son sommet B, on mène une droite quelconque By ; des points A et C on abaisse sur cette droite les perpendiculaires AD, CE. Trouver le lieu du point O, milieu du segment DE de By compris entre les pieds des perpendiculaires.

3°. Théorie des miroirs et détermination des foyers.

Brome, ses propriétés, son extraction.

4°. La droite AB étant dans le plan vertical et CD dans le plan horizontal, on suppose que cette dernière tourne autour de la première ; elle engendrera un hyperboloïde de révolution. Trouver l'intersection de cette surface avec un plan horizontal ; déterminer les sommets de la courbe d'intersection.

QUESTIONS D'EXAMEN D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1849

(voir t. VIII, p. 366).

92. Si les six faces d'un polyèdre sont des parallélogrammes, le polyèdre est-il un parallélipipède ? combien faut-il de sommets pour déterminer un parallélipipède ? combien faut-il d'arêtes ? Suffit-il de connaître les directions des arêtes ?

93. $y = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$. Trouver l'asymptote et le point le plus haut de la boucle.



94. $a + b\sqrt{-1}$ et $a - b\sqrt{-1}$ sont-ils toujours un même nombre de fois racines dans $f(x) = 0$?

95. $x = \frac{c}{p.q}$, p et q sont premiers entre eux. Démontrer qu'on peut toujours décomposer x en deux parties $\frac{a}{p}$ et $\frac{b}{q}$; le peut-on d'une infinité de manières; la somme des deux parties entières est toujours la même, la somme des deux parties fractionnaires est toujours la même fraction; ne pas s'appuyer sur la résolution de $ax + by = c$.

96. Surface d'un segment d'ellipse compris entre la courbe et une corde donnée.

97. $\frac{(x^m - 1)(x^{m-1} - 1)(x^{m-2} - 1)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}$ est toujours entier, quel que soit m.

98. Trouver l'arc dont la tangente est $x + 1$ et vaut trois fois l'arc dont la tangente est $x - 1$.

99. On partage le rayon d'une sphère en quatre parties égales; sur les deux divisions moyennes comme diamètre, on décrit une sphère; cette sphère étant enlevée de la grande, trouver le centre de gravité de la partie restante.

100. Un cercle ayant pour surface 1 000 mètres carrés, lui inscrire et lui circonscrire des polygones réguliers semblables dont la différence des surfaces soit moindre qu'un décimètre carré.

101. Équilibre d'une baguette sur deux circonférences concentriques.

102. Par un point donné mener une droite qui s'appuie sur deux circonférences horizontales (Géométrie descriptive); le problème est-il toujours possible?

103. Soient ABC un triangle sphérique, BD la bissec-

trice de l'angle intérieur ABC et BD′ la bissectrice de l'angle extérieur CBA′; démontrer que l'on à la proportion

$$\frac{\sin AB}{\sin BC}=\frac{\sin AD}{\sin CD}=\frac{\sin AD'}{\sin CD'}.$$

Que devient ce théorème quand le triangle sphérique devient triangle rectiligne, par suite de ce que le rayon de la sphère devient infini?

104. Deux paraboles sont, l'une dans le plan des xy, l'autre dans le plan des zx; la seconde se meut parallèlement à elle-même, son sommet restant constamment sur la première. Trouver l'équation de la surface engendrée; et, par la géométrie descriptive, étant donnée la projection horizontale d'un point de cette surface, trouver sa projection verticale.

105. Équilibre d'une sphère entre deux plans.

106. $\rho=\frac{\tang 3\varphi}{\tang^2\varphi}$; construire et discuter.

107. On donne l'angle d'un cône dont l'axe est l'axe des x, on donne la projection horizontale d'un point de la surface. Trouver sa projection verticale et le plan tangent en ce point.

108. Lieu des centres de gravité des arcs issus d'un même point sur une même circonférence. Construire avec la règle et le compas la tangente en un point du lieu.

109. Trouver le lieu des points dont le produit des distances aux sommets d'un polygone régulier est constant.

110. Lieu des centres des hyperboles équilatères passant par les sommets d'un triangle rectangle.

111. Intersection de deux cylindres, l'un parallèle au plan horizontal, l'autre au plan vertical, ou bien, l'un perpendiculaire au plan horizontal, l'autre au plan ver-

tical. Construire la tangente en un point (Géométrie descriptive).

112. On a une suite de rectangles dont le sommet commun est A, le sommet adjacent est sur une circonférence, la diagonale de ce second sommet passe toujours par le centre. Trouver le lieu décrit par le sommet P, opposé à A, et par le point M, intersection des diagonales.

113. Aux deux sommets opposés A, B d'un parallélogramme articulé, on applique des forces égales, contraires et dirigées suivant la diagonale AB; aux sommets C, D on applique des forces égales contraires et dirigées suivant la diagonale CD. Quelle est la condition pour que les quatre sommets soient en équilibre?

114. Trouver x, sachant que $\sin\left(\frac{x}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{5}\right)$.

115. MD étant la partie de la normale à une ellipse, comprise entre la courbe et le grand axe, on prolonge cette normale d'une quantité DN égale à MD. Trouver le lieu des points N.

116. Soient S_n et S_{n+1} la somme des $n^{\text{ièmes}}$ et des $(n+1)^{\text{ièmes}}$ puissances des racines d'une équation, démontrer que $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ a pour limite la plus grande des racines (elles sont toutes réelles).

117. On projette un point du plan d'une ellipse sur un diamètre par une perpendiculaire qui rencontre le diamètre conjugué de ce diamètre en un point dont on demande le lieu.

ARITHMOLOGIE. DE LA COMPOSITION DES NOMBRES EN CUBES ENTIERS ET POSITIFS;

PAR M. ZORNOW,
Régent du gymnase de Kneiphausen, à Kœnigsberg.

(Journal de M. Crelle, tome XIV, page 276; 1835.)

Édouard Waring, dans ses *Meditationes algebraicæ* (Cantæbrigiæ, 1782; ed. 3), entre autres théorèmes qu'il propose sans démonstration, énonce celui-ci : « *Omnis* » *integer numerus vel est cubus vel è duobus, tribus*, 4, » 5, 6, 7, 8, *vel novem cubis compositus: est etiam qua-* » *dratoquadratus vel è duobus, tribus, etc. usque ad* » *novemdecim compositus, et sic deinceps. Consimilia* » *etiam affirmari possunt (exceptis excipiendis) de eodem* » *numero quantitatum dimensionum* (*). »

M. Zornow conjecture que la fin un peu obscure de cet énoncé signifie que la proposition a également lieu pour les nombres de la forme $a + bx + cx^2 + dx^3$, $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$. Ayant été prié par M. Jacobi de vérifier le théorème, M. Zornow a calculé une Table pour les cubes des nombres de 1 à 30 000, et a trouvé que le théorème subsiste dans tout cet intervalle; il n'y a qu'un seul nombre, savoir 23, pour lequel il faille 9 cubes: $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$, et quatorze nombres pour lesquels il faut au moins 8 cubes; le plus petit de ces nombres est 15 : $15 = 2^3 + 7 \cdot 1^3$, et le plus grand est 454 : $454 = 7^3 + 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 1^3$.

Cette Table ingénieuse donne le moyen de trouver non-seulement le nombre minimum des cubes dont un nombre est formé, mais encore ces cubes eux-mêmes.

(*) Il s'agit peut-être de théorèmes analogues pour toutes les puissances. TM.

BIBLIOGRAPHIE (*).

EXERCICES ET PROBLÈMES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, par M. *F.-D. Gregory*; traduit de l'anglais par M. *Léonce Clarke*, professeur de mathématiques. Paris, 1849; in-8°; XII, 55 pages.

On a fait aux éléments de calcul infinitésimal une réputation de difficulté qui les fait repousser de l'enseignement secondaire, et, toutefois, cet enseignement comprend des objets bien plus difficiles. Le théorème de M. Cauchy pour prouver l'existence des racines, celui de M. Sturm pour trouver ces racines, et même certaines considérations arithmétiques, exigent de plus grands efforts intellectuels que les procédés élémentaires du calcul différentiel; et combien l'introduction de ces procédés ferait économiser de temps et de peines, et populariserait de précieuses connaissances! L'ouvrage de M. Clarke facilitera cette introduction, que nous appelons de tous nos vœux; excellente importation, que tout calculateur analyste voudra se procurer. On doit surtout recommander ce recueil aux élèves de l'École Polytechnique; c'est, pour eux, un véritable *vade-mecum* : l'habileté qu'ils acquerront par ces exercices, leur fera mieux comprendre la théorie, car la pratique est la véritable clef de la théorie. Le chapitre III, sur le changement de la variable indépendante, aplanit bien des difficultés, et contient de beaux résultats. Espérons que le succès de

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. BACHELIER, libraire, quai des Augustins, n° 55.

cette traduction hâtera la publication des cahiers suivants. Quand traduira-t-on le *Calcul différentiel et intégral* d'Euler? c'est une mine inépuisable de lumières, d'instructions et de méditations; en y joignant ce qui a été fait jusqu'aux travaux des Hamilton, des Jacobi, etc., on acquerrait des droits à la reconnaissance de tous les géomètres.

Les Anglais se servent du signe $\sin^{-1} x$ pour signifier arc $\sin = x$; en effet, $\mathrm{P}f(x)$ désignant une opération à faire sur $f(x)$, alors $\mathrm{P}^{-1}f(x)$ désigne la même opération à faire sur une fonction inconnue, et telle, que le résultat de l'opération soit $f(x)$: ainsi, sinus arc x désignant une opération sur l'arc x, $\sin^{-1}$ arc x signifie évidemment arc $\sin = x$. Mais cette notation présente un inconvénient, c'est que l'exposant, signe d'opération, peut être confondu avec le sens ordinaire; alors on aurait $\sin^{-1} x = \text{coséc}\, x$, $\cos^{-1} x = \text{séc}\, x$.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, recueillis par M. *Léonce Clarke*, professeur de mathématiques. Première partie : *Trigonométrie rectiligne*; in-8°, 1849; 64 pages.

Nous emprunterons à cet ouvrage quelques formules, pour les ajouter à notre Recueil (t. V, p. 411); nous engageons M. Clarke, dans une seconde édition, à nous faire quelques emprunts, bien entendu, sans le dire: il ne faut pas établir de mauvais précédents pour d'autres.

Un recueil *systématique* des intégrales définies connues serait une précieuse acquisition et épargnerait bien des recherches superflues. Je pourrais fournir quelques matériaux pour ce travail.

ARITHMOLOGIE. — NOTE SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES

(voir t. I, p. 387);

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

Le système en question est celui-ci :

(1) $$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,$$

(2) $$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1,$$

(3) $$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1;$$

(4) $$bc + b'c' + b''c'' = 0,$$

(5) $$ca + c'a' + c''a'' = 0,$$

(6) $$ab + a'b' + a''b'' = 0.$$

Ces équations en donnent, comme l'on sait, beaucoup d'autres, dont nous allons rappeler brièvement la déduction, avant de faire connaître deux nouvelles équations dues à M. Jacobi. (*Journal* de M. Crelle, t. XX, p. 46.)

Les équations (5) et (6) donnent, par la résolution, relativement à $\frac{a}{a''}$, $\frac{a'}{a''}$,

$$\frac{b'c'' - b''c'}{a} = \frac{b''c - bc''}{a'} = \frac{bc' - b'c}{a''};$$

la valeur commune est ∓ 1.

En effet, si l'on élève au carré, et que l'on ajoute terme à terme les fractions résultantes, en vertu de

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$$

et de

$$(b'c'' - b''c')^2 + (b''c - bc'')^2 + (bc' - b'c)^2 + (bc + b'c' + b''c'')^2 \\ = (b^2 + b'^2 + b''^2)(c^2 + c'^2 + c''^2),$$

on aura 1 pour la valeur du carré de la valeur commune. On posera donc

(7) $$\pm a = b'c'' - b''c',$$

(8) $$\pm a' = b''c - bc'',$$

(9) $$\pm a'' = bc' - b'c;$$

d'où, en multipliant par a, a', a'' les deux membres de ces équations, on aura, en sommant,

$$\pm 1 = a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c).$$

Si dans ces quatre équations on permute circulairement a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', la dernière équation ne changera pas; ainsi, les équations (7), (8) et (9) entraînent celles-ci :

(10) $$\pm b = c'a'' - c''a',$$

(11) $$\pm b' = c''a - ca'',$$

(12) $$\pm b'' = ca' - c'a;$$

(13) $$\pm c = a'b'' - a''b',$$

(14) $$\pm c' = a''b - ab'',$$

(15) $$\pm c'' = ab' - a'b;$$

(16) $$\pm 1 = a(b'c'' - b''c') + a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c).$$

Au moyen de ces équations (7) à (15), on vérifie tout de suite ces trois autres :

(17) $$aa' + bb' + cc' = 0,$$

(18) $$aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$

(19) $$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0;$$

enfin, les équations

(20) $$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

(21) $$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$

(22) $$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

s'établissent ainsi :

$$(a'^2 + a''^2)(b'^2 + b''^2) = (1 - a^2)(1 - b^2) = 1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$$
$$= 1 - a^2 - b^2 + (a'b' + a''b'')^2,$$

ou encore

$$(a' b'' - a'' b')^2 = 1 - a^2 + b^2,$$

ou bien

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

A ces équations (7) à (22), M. Jacobi a joint deux équations très-remarquables,

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^o. \ a^2 a'^2 a''^2 + b^2 b'^2 b''^2 + c^2 c'^2 c''^2 \\ = a^2 b^2 c^2 + a'^2 b'^2 c'^2 + a''^2 b''^2 c''^2. \end{array} \right.$$

On a

$$a^2 a'^2 a''^2 = a' a \ (bb'' + cc'')(bb' + cc'),$$

ou bien

$$a^2 a'^2 a''^2 = a'a''b'b''.b^2 + a'a''c'c''.c^2 + a'b''c.a''bc' + a'bc''.a''b'c.$$

De là, par la permutation tournante,

$$b^2 b'^2 b''^2 = b'b''c'c''.c^2 + b'b''a'a''a^2 + b'c''a.b''ca' + b'ca''.b''c'a$$
$$c^2 c'^2 c''^2 = c'c''a'a''\ b^2 + c'c''\ b'b''\ a^2 + c'a''a\ c''ab'' + c'ab''c.c''a'b.$$

Mais

$$a^2 a'\ a''\ (b'\ b'' + c'\ c'') = - a^2 a'^2 a''^2,$$
$$b^2 b'\ b''\ (c'\ c'' + a'a'') = - b^2 b'^2 b''^2,$$
$$c^2\ c'\ c''\ (a'\ a'' + b'\ b'') = - c^2\ c'^2\ c''^2.$$

On aura donc, par addition,

$$\Gamma = 2(a^2 a'^2 a''^2 + b^2 b'^2 b''^2 + c^2 c'^2 c'')$$
$$= a'\ b''\ c.\ a''\ bc' + a''\ bc'.\ ab'\ c'' + ab'c''.\ a'\ b''\ c$$
$$+ a'\ bc''.\ a''\ b'\ c + a''\ b'\ c.\ ab''\ c' + ab''\ c'.\ a'\ bc''.$$

Un calcul tout semblable donne

$$\Gamma = 2(a^2 b^2 c^2 + a'^2 b'^2 c'^2 + a''^2 b''^2 c''^2);$$

de là l'équation (23).

L'équation suivante est plus compliquée. Si l'on fait

$$p = ab'c'' + a'b''c + a''bc', \qquad q = ab''c' + a'bc'' + a''b'c,$$
$$r = ab'b'' + a'b''b + a''bb', \qquad s = ac'c'' + a'c''c + a''cc',$$
$$r' = bc'c'' + b'c''c + b''cc', \qquad s' = ba'a'' + b'a''a + b''aa',$$
$$r'' = ca'a'' + c'a''a + c''aa', \qquad s'' = cb'b'' + c'a''b + c''bb';$$

on aura l'équation (24) suivante,

$$(p-q)^2 = 15(a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2) + (r-s)^2 + (r'-s')^2 + (r''-s'')^2 + (p+q)^2;$$

ou bien, en vertu de l'équation (23),

$$(24)\qquad (p-q)^2 + a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2 = (4aa'a'')^2 + (4bb'b'')^2 + (4cc'c'')^2 + (r-s)^2 + (r'-s')^2 + (r''-s'')^2 + (p+q)^2.$$

Pour vérifier l'équation (24), on remarquera que l'on a

$$(p+q)^2 - (p-q)^2 = 4pq,$$
$$(r-s)^2 = (r+s)^2 - 4rs,\quad r+s = -3aa'a'';$$

d'où

$$(r-s)^2 = 9a^2a'^2a'' - 4rs.$$

De même

$$(r'-s')^2 = 9b^2b'^2b'' - 4r's',$$
$$(r''-s'')^2 = 9c^2c'^2c'' - 4r''s''.$$

De sorte qu'en divisant par 4, l'équation (24) donne

$$rs + r's' + r''s'' = 6(a^2a'^2a'' + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2) = 3\Gamma + pq.$$

Or on trouve

$$rs = \Gamma + a^2b'b''c'c'' + a'^2b''bc''c + a''^2bb'cc',$$
$$r's' = \Gamma + b^2c'c''a'a'' + b'^2c''ca''a + b''^2cc'aa',$$
$$r''s'' = \Gamma + c^2a'a''b'b'' + c'^2a''ab''b + c''^2aa'bb',$$

d'où, par l'addition,

$$rs + r's' + r''s'' = 3\Gamma + pq.$$

Voir Journal de M. Crelle, t. XXX, p. 46.

N. B. L'équation (16) donne

$$p - q = \pm 1.$$

Rien de plus facile que de trouver les solutions réelles du système (1) à (6), à trois indéterminées.

D'abord, les équations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,\quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

donnent, en posant

$$a'' = \cos\gamma,$$

puisque $a''^2 < 1$,

$$a = \sin\gamma \sin\varphi, \quad a' = \sin\gamma \cos\varphi, \quad a'' = \cos\gamma,$$
$$b'' = \sin\gamma \sin\psi, \quad c'' = \sin\gamma \cos\psi;$$

les équations (2) à (6) deviennent

$$b^2 + b'^2 = 1 - \sin^2\gamma \sin^2\psi, \quad c^2 + c'^2 = 1 - \sin^2\gamma \cos^2\psi,$$
$$b \sin\varphi + b' \cos\varphi = -\cos\gamma \sin\psi,$$
$$c \sin\varphi + c' \cos\varphi = -\cos\gamma \cos\psi,$$
$$bc + b'c' = -\sin^2\gamma \sin\psi \cos\psi.$$

On tire de là

$$(b^2 + b'^2)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - (b \sin\varphi + b' \cos\varphi)^2$$
$$= 1 - \sin^2\gamma \sin^2\psi - \cos^2\gamma \sin^2\psi;$$

ou bien

$$(b \cos\varphi - b' \sin\varphi)^2 = \cos^2\psi,$$

ou encore

$$b \cos\varphi - b' \sin\varphi = i \cos\psi; \quad (i = \pm 1).$$

D'ailleurs

$$b \sin\varphi + b' \cos\varphi = -\cos\gamma \sin\psi,$$

de là

$$b = -\cos\gamma \sin\varphi \sin\psi + i \cos\varphi \cos\psi,$$
$$b' = -\cos\gamma \cos\varphi \sin\psi - i \sin\varphi \cos\psi.$$

On a aussi

$$c \cos\varphi - c' \sin\varphi = i' \sin\psi, \quad (i' = \pm 1),$$
$$c \sin\varphi + c' \cos\varphi = -\cos\gamma \cos\psi;$$

de là

$$c = -\cos\gamma \sin\varphi \cos\psi + i' \cos\varphi \sin\psi,$$
$$c' = -\cos\gamma \cos\varphi \cos\psi - i' \sin\varphi \sin\psi.$$

Ces valeurs réduisent l'équation

$$bc + b'c' = -\sin^2\gamma \sin\psi \cos\psi$$

à

$$ii' + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 0;$$

donc

$$ii' = -1.$$

Ainsi i et i' sont de signes contraires. On a donc la solution générale (*).

SOLUTION DE LA QUESTION 135

(voir t. V, p. 672);

PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Élève en mathématiques supérieures.

PROBLÈME. *Trouver la relation qui doit exister entre le côté et la base d'un triangle isocèle, pour que la bissectrice de l'angle à la base ait un rapport donné avec le côté du triangle.* (VIÈTE.)

Solution. Soit ABC un triangle isocèle dans lequel AB, AC sont les côtés égaux, BK étant la bissectrice;

$$AB = a,$$

$$BC = b.$$

Pour obtenir cette relation, il faut, dans $BK : AB :: m : n$, exprimer BK en fonction de a et de b. Or

$$BK : BC :: \sin C : 3\sin\frac{C}{2} - 4\sin^3\frac{C}{2}:$$

$$:: 2\cos\frac{C}{2} : 4\cos^2\frac{C}{2} - 1;$$

(*) On trouve des relations du genre de celles qui ont été indiquées par M. Lebesgue, dans un Mémoire de M. Catalan *sur la transformation des variables dans les intégrales multiples*, inséré parmi ceux de l'Académie de Bruxelles.

donc

$$BK = \frac{2b.\cos\frac{C}{2}}{4\cos^2\frac{C}{2} - 1};$$

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b+2a}{a}};$$

donc

$$BK = \frac{ab\sqrt{\frac{b+2a}{a}}}{b+a},$$

et la relation cherchée sera

$$nb\sqrt{\frac{b+2a}{a}} = m(b+a).$$

1°. Supposons $m = n$; alors $b\sqrt{\frac{b+2a}{a}} = b + a$, ou, en développant, $b^3 + ab^2 - 2a^2b - a^3 = 0$. Divisant par a^3, et observant que $\frac{b}{a} = 2\cos C$, les valeurs de $\cos C$ seront données par l'équation

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Or la figure indique que, pour $m = n$, c'est-à-dire lorsque $BK = a$, l'angle $C = \frac{2\pi}{7}$.

Voyons si le résultat fourni par la trigonométrie s'accorde avec le calcul précédent.

On a l'équation

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x - 1 = 0,$$

dans laquelle

$$x = \cos\frac{2\pi}{7}$$ (*voir* t. V, p. 350),

et cette équation a pour racines les cosinus des angles

$$\frac{2\pi}{7},\quad \frac{4\pi}{7},\quad \frac{6\pi}{7},\quad \frac{8\pi}{7},\quad \frac{10\pi}{7},\quad \frac{12\pi}{7},\quad \frac{14\pi}{7}.$$

Or

$$\cos\frac{14\pi}{7} = 1;$$

donc elle admet la racine $+1$, et si nous divisons son premier membre par $x-1$, le quotient sera

(1) $\quad 64x^6 + 64x^5 - 48x^4 - 48x^3 + 8x^2 + 8x + 1.$

Ce quotient égalé à zéro admettra les six autres racines : mais

$$\cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{8\pi}{7},$$
$$\cos\frac{4\pi}{7} = \cos\frac{10\pi}{7},$$
$$\cos\frac{2\pi}{7} = \cos\frac{12\pi}{7}:$$

donc le quotient (1) est un carré, et si nous extrayons sa racine, nous trouvons

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0,$$

qui est précisément l'équation fournie par le premier calcul. On voit donc, qu'à l'exception de la racine $+1$, ces deux équations admettent les mêmes racines.

2°. $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$. La relation devient $a^2 - b^2 - ab = 0$; d'où l'on tire l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

qui doit donner les valeurs de cos C. En la résolvant, on trouve

$$x' = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5}),\quad x'' = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5}).$$

Or

$$\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}) = \cos 72^\circ, \quad \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) = \cos 2.72.$$

De ces deux valeurs, la première seule convient, puisque $2.72 > 90^\circ$.

Donc $C = 72^\circ$. On le vérifie immédiatement sur la figure.

Ce résultat s'accorde avec celui qui est fourni par la trigonométrie. En effet, l'équation qui donne $\cos\frac{2\pi}{7}$ est

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0.$$

Ses racines sont les cosinus des angles

$$\frac{2\pi}{5}, \quad \frac{4\pi}{5}, \quad \frac{6\pi}{5}, \quad \frac{8\pi}{5}, \quad \frac{10\pi}{5};$$

donc elle admet la racine $+1$.

Le quotient de son premier membre par $x - 1$ est

(2) $$16x^4 - 16x^3 - 36x^2 - 36x + 1;$$

mais

$$\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5},$$

$$\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \cos\frac{4\pi}{5}:$$

donc le quotient (2) est un carré, et si nous extrayons la racine, nous obtenons l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

qui est celle qui a été fournie par le calcul précédent.

3°. Si $a = b$. $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$.

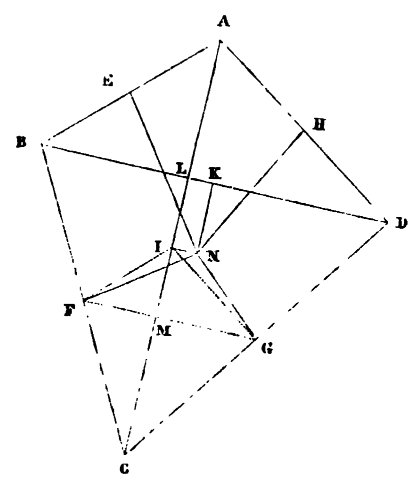
Note. Le même élève nous a adressé de très-bonnes solutions, parvenues trop tard, de la question élémentaire du grand concours, et de la question 214me.

THÉORÈME SUR LA DIVISION DE L'AIRE D'UN QUADRILATÈRE PLAN

(voir t. VIII, p. 365);

PAR MM. G. FOUCAULT, élève en spéciales au lycée de Nantes; PEAUCELLIER, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Lionnet); UN ANONYME, de Strasbourg.

THÉORÈME. *Si dans un quadrilatère quelconque* ABCD *on mène par les milieux* I *et* K *de chacune des diagonales une parallèle à l'autre, et qu'on joigne leur point de concours* N *aux milieux* E, F, G, H, *des côtés du quadrilatère, il sera partagé en quatre quadrilatères équivalents.* (BRUNE.)



Démonstration. Je joins FG ; cette droite est parallèle à BD et à IN. Le quadrilatère CFIG est évidemment le quart du quadrilatère total, car il est la moitié du quadrilatère rentrant CBID, moitié du quadrilatère total : mais le quadrilatère NFCG est équivalent au quadrilatère CFIG ; donc

$$NFCG = \frac{1}{4} ABCD.$$

On démontrerait de la même manière que chacun des quadrilatères NFBE, NEAH, NHDG est le quart du proposé.

SOLUTION DE LA QUESTION 215

(voir t. VIII, p. 394) ;

PAR M. J. MURENT (DE CLERMONT-FERRAND).

Par tout point A d'une conique passent quatre cercles osculateurs, ayant leurs points de contact en A, B, C, D ; le centre de la conique est le centre de moyenne distance des trois points B, C, D. (JOACHIMSTHAL.)

M. Terquem a déjà démontré (*voir* tome VII, page 22) qu'il y a, en effet, quatre cercles, et, en outre, que les quatre points d'osculation A, B, C, D sont sur une même circonférence. La démonstration est fondée sur une propriété que l'on trouve dans l'article de M. Gérono sur les normales (*voir* tome II, page 75).

Pour prouver la dernière partie de l'énoncé, prenons, à l'endroit cité du tome VII, l'équation de la conique rapportée à deux axes coordonnés menés par le point A, parallèlement aux axes principaux, savoir :

$$(1) \qquad Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex = 0,$$

et les équations simultanées

$$(2)\quad \begin{cases} 2Ay'^2 - 2Cx'^2 + Dy' - Ex' = 0, \\ Ay'^2 + Cx'^2 + Dy' + Ex' = 0, \end{cases}$$

qui déterminent les coordonnées des points d'osculation.

En éliminant y' du système (2), l'équation finale en x' sera du quatrième degré, et aura pour racines les abscisses des quatre points d'osculation A, B, C, D.

Or, sans effectuer l'élimination, on peut calculer les coefficients du deuxième et du premier terme de l'équation finale; le rapport, changé de signe, de ces deux coefficients, sera égal à la somme, $\sum x'$, des racines. D'ailleurs, à cause de la racine nulle qui se rapporte au point A, $\sum x'$ sera seulement la somme des abscisses des trois points B, C, D.

• Il suffit, en effet, d'appliquer au système (2) la formule générale donnée par M. Merlieux (*voir* tome II, page 35). En y faisant les substitutions et les réductions convenables, on trouve

$$\sum x' = -\frac{3E}{2C} = 3\left(-\frac{E}{2C}\right).$$

Si l'on suppose qu'on élimine, à son tour, x', il faudra, dans la formule, remplacer les coefficients de x'^2 et x' pris dans les équations (2) par ceux de y'^2, y', et *vice versâ* : on aura ainsi

$$\sum y' = 3\left(-\frac{D}{2A}\right),$$

$\sum y'$ étant la somme des ordonnées des trois points B, C, D.

D'autre part, si l'on désigne par X et Y les coordonnées du centre de la conique, on déduit très-simplement de

l'équation (1),

$$X = -\frac{E}{2C}, \quad Y = -\frac{D}{2A},$$

et la comparaison de ces valeurs avec les deux égalités précédentes donne

$$\sum x' = 3X, \quad \sum y' = 3Y,$$

relations qui prouvent bien que le centre de la conique est le centre de moyenne distance des trois points B, C, D.

Note. Le centre de la conique est donc le centre de gravité de l'aire du triangle BCD; donc ce triangle est la projection d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection orthogonale. Ainsi, le triangle BCD, lorsqu'il existe, a une aire constante; mais il est possible que deux de ces points deviennent imaginaires : ce qui a lieu lorsque l'équation du troisième degré, résultant de l'élimination, a deux racines imaginaires. Considérons les quatre cercles osculateurs qui passent par B; désignons-les par B, A, M, N. Les quatre points relatifs à C, s'ils existent, seront C, A, M, N, car le point commun A est le sommet du triangle équilatéral elliptique inscrit, et il n'en existe qu'un seul; mais les points B, C, A, M, N devraient être sur la même circonférence, ce qui est impossible. Donc, si le premier triangle AMN est réel, le second est imaginaire, et de même par rapport au point D.

SOLUTION DE LA QUESTION 211
(voir t. VIII, p. 392);

PAR M. PLOIX (EDMOND).

On prolonge le rayon de courbure d'une conique, à l'extérieur, d'une longueur égale à ce rayon; le cercle décrit sur le prolongement comme diamètre coupe orthogonalement le lieu géométrique du sommet de l'angle droit circonscrit à la même conique. (STEINER.)

Prenons une ellipse dont le centre est en C; décrivons le cercle du rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, lieu géométrique du sommet de l'angle droit circonscrit à l'ellipse.

Soit une tangente quelconque AT; et AM le prolongement du rayon de courbure. Supposons décrit un cercle tangent en A à la droite AT, et coupant orthogonalement la seconde circonférence du rayon $\sqrt{a^2+b^2}$. Soit G le point de rencontre des deux cercles; on sait que GC est tangent à la première circonférence, dont le centre est en O.

Il suffit de prouver que OA est égal au demi-rayon de courbure du point A, ou à

$$\frac{a'^2}{2b'\sin\theta}; \quad b' = \text{CA}; \quad \theta = \text{tang CAT}.$$

Or, soit prolongé CA jusqu'à ce qu'il rencontre de nouveau le cercle en B. On a

$$\text{CB} \cdot \text{CA} = \overline{\text{CG}}^2 = a^2 + b^2;$$

donc

$$\text{CB} = \frac{a^2+b^2}{b'}.$$

D étant le milieu de AB, on a

$$DA = \frac{1}{2} AB = \frac{BC - b'}{2} = \frac{a^2 + b^2 - b'^2}{2b'} = \frac{a'^2}{2b'}.$$

Or

$$OA = \frac{DA}{\cos OAD} = \frac{DA}{\sin \theta};$$

on a donc

$$OA = \frac{a'^2}{2b' \sin \theta}.$$

Ce qu'il fallait trouver.

La même démonstration a lieu pour l'hyperbole. Le cas particulier pour la parabole est dû à M. Poncelet, et a précédé l'énoncé général de M. Steiner; il a été démontré par M. Gérono (tome II, page 185).

SECONDE SOLUTION DU PROBLÈME 35

(voir t. II, p. 36);

PAR M. DEWULF (ED.),
Élève au lycee de Saint-Omer.

---

1. *Lemme.* Lorsque deux tétraèdres ont un angle solide égal chacun à chacun, par superposition ou par symétrie, les volumes sont proportionnels aux produits des arêtes qui comprennent les angles égaux.

2. THÉORÈME. — *Si l'on coupe un octaèdre régulier par un plan qui y produise la section abcd, on aura*

$$\frac{1}{Sa} + \frac{1}{Sc} = \frac{1}{Sb} + \frac{1}{Sd}. \qquad \text{(LEVY.)}$$

Démonstration. Menons les diagonales ac, bd. Les tétraèdres $Sacd$, $Sacb$ ont un angle solide égal en S: de

même les tétraèdres $Sbda$, $Sbdc$: donc, en vertu du lemme, on a

$$Sacd : Sacb :: Sa.Sc.Sd : Sa.Sc.Sb :: Sd : Sb,$$

$$Sbda : Sbdc :: Sb.Sd.Sa : Sb.Sd.Sc :: Sa : Sc.$$

d'où

$$Sabcd : Sacb :: Sb + Sd : Sb,$$

$$Sabcd : Sbdc :: Sa + Sc : Sc.$$

Mais

$$\frac{Sbca}{Sbcd} = \frac{Sa}{Sd} \text{ (lemme)};$$

donc

$$1 : \frac{Sa}{Sd} :: \frac{Sb + Sd}{Sa + Sc} : \frac{Sb}{Sc}.$$

Cette proportion donne

$$Sa.Sc(Sb + Sd) = Sb.Sd(Sa + Sc);$$

divisant chaque membre par $Sa.Sb.Sc.Sd$, on obtient

$$\frac{1}{Sa} + \frac{1}{Sc} = \frac{1}{Sb} + \frac{1}{Sd}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. Ce moyen de démonstration s'applique à une pyramide quadrangulaire ayant pour base un rectangle dont le centre est le pied de la hauteur.

Corollaire I. Soit une pyramide ayant pour base un polygone régulier d'un nombre pair de côtés, et dont le centre est le pied de la hauteur; si l'on coupe la pyramide par un plan rencontrant deux arêtes diamétralement opposées, en deux points A et A', S étant le sommet, la somme $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'}$ est constante.

Corollaire II. Si l'on coupe un cône circulaire droit par un plan, A et A' étant les points d'intersection du plan avec deux arêtes diamétralement opposées, et S le sommet, la somme $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'}$ est constante.

Soient B et B' les projections orthogonales de A et A' sur le plan passant par S perpendiculairement à l'axe; on aura évidemment $\frac{1}{SB} + \frac{1}{SB'}$ constant : donc S est le foyer de la projection de la section faite dans le cône sur le plan passant par le sommet, et parallèle à la base (*voir* tome VIII, page 445).

SOLUTION DE LA QUESTION 212

(voir t. VIII, p. 393) ;

PAR M. ESTIENNE (A.),
Élève du lycée de Versailles.

THÉORÈME. *Soit* DEF *un triangle équilatéral circonscrit au triangle donné* ABC; A, B, C *sont respectivement sur* DF, DE, EF. *Appelons* φ *et* γ *les angles* CBE, BCA, *on aura*

$$\mathrm{DE} = \mathrm{DF} = \mathrm{EF} = \frac{a \sin\varphi + b \sin\left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi\right)}{\sin\frac{1}{3}\pi},$$

où

$$a = \mathrm{BC}; \quad b = \mathrm{AD}.$$

Si l'on élève en A, B, C *des perpendiculaires aux côtés du premier triangle équilatéral, on formera un second triangle équilatéral; la somme des aires des deux triangles équilatéraux est*

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\frac{1}{3}\pi + \gamma\right)}{2\sin\frac{1}{3}\pi}.$$

(FASSBENDER.)

Démonstration. On a : 1°.

$$BCE = \frac{2}{3}\pi - \varphi; \quad BCF = \frac{1}{3}\pi + \varphi; \quad ACF = \frac{1}{3}\pi + \varphi - \gamma;$$

$$FAC = \frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi; \ CE = \frac{a \sin\varphi}{\sin\frac{1}{3}\pi}; \ CF = \frac{b \sin\left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi\right)}{\sin\frac{1}{3}\pi}:$$

donc EF a la valeur donnée ci-dessus, et l'aire du triangle équilatéral est donc $\frac{1}{2\sin\pi}\left[a\sin\varphi + b\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi\right)\right]^2$.

2°. Supposons que la perpendiculaire élevée en C au côté EF soit rencontrée en M par la perpendiculaire élevée en B, et en N par la perpendiculaire élevée en A ; de sorte que MN sera le côté du second triangle équilatéral. Les triangles CBM, CAN donnent

$$CM = \frac{a\cos\varphi}{\sin\frac{1}{3}\pi}; \quad CN = \frac{b\cos\left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi\right)}{\sin\frac{1}{3}\pi};$$

donc

$$MN = \frac{a\cos\varphi - b\cos\left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi\right)}{\sin\frac{1}{3}\pi}:$$

l'aire du second triangle équilatéral est donc

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{3}\pi}\left[a\cos\varphi - b\cos\left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi\right)\right]^2.$$

Ajoutant les deux aires, on trouve l'expression consignée ci-dessus.

Lorsque les trois perpendiculaires se rencontrent, on a

$$a\cos\varphi = b\cos\left(\frac{1}{3}\pi + \gamma - \varphi\right);$$

alors l'aire du second triangle équilatéral est nulle, et comme la somme des aires des deux triangles est indépendante de φ, il s'ensuit que, dans ce cas, l'aire du premier triangle est un maximum ; et comme les perpendiculaires font entre elles des angles de 120 degrés, la somme des distances du point de rencontre aux sommets du second triangle équilatéral est un minimum, d'après une proposition connue.

NOTE SUR LES LIGNES DE COURBURE

D'APRÈS M. JOACHIMSTHAL.

(Journal de M. Crelle, t. XXVI, p. 179; 1847.)

---

1. *Lemme.* Dans une surface du second degré, pour que deux normales se rencontrent, il est nécessaire et suffisant que la polaire de la droite qui joint les points d'où partent les normales soit perpendiculaire à cette droite.

2. *Lemme.* Deux droites polaires sont parallèles à deux diamètres conjugués de la surface.

3. *Lemme.* Lorsqu'une droite est tangente à une surface du second degré, la polaire est aussi tangente à cette surface.

4. Théorème. *Si, par le point d'une surface du second degré, on mène deux tangentes parallèles aux axes principaux de la section diamétrale parallèle au plan tangent, ces deux tangentes sont tangentes aux lignes de courbure.*

Démonstration. En allant dans la direction d'une de ces tangentes, la normale infiniment voisine rencontre

celle du point de contact; c'est une conséquence des lemmes précédents.

Il ne passe donc en chaque point que deux lignes de courbure et de direction perpendiculaire.

Observation. Le théorème subsiste pour une surface quelconque; il faut avoir recours à l'ellipsoïde osculateur.

AIRE DU POLYGONE EN FONCTION DES COORDONNÉES DES SOMMETS.

Polygone. Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3;..., x_n, y_n les coordonnées des sommets consécutifs d'un polygone convexe de n côtés, et γ l'angle des axes; P étant l'aire cherchée, on a

$$2P = \sin\gamma \left(\begin{array}{c} x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + x_3 y_4 - y_3 x_4 + \ldots \\ + x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n \end{array}\right).$$

On parvient immédiatement à cette formule, en décomposant le polygone en trapèzes formés par les côtés, les ordonnées et les portions de l'axe des abscisses, comprises entre les ordonnées. Pour éviter l'embarras des signes, on choisit les axes de manière à ce que toutes les coordonnées soient positives.

Observation. Cette évaluation était connue de Waring, qui donne ainsi l'aire d'un polygone inscrit dans une parabole (*voir* t. IV, p. 183, au bas); cette formule ne paraît pas avoir été remarquée. De Stainville l'a donnée sous cette forme symétrique, à la notation près, dans un ouvrage devenu très-rare : *Recueil de Problèmes résolus par des considérations purement géométriques*, et il l'a reproduite dans ses *Mélanges d'Analyse*, p. 668; 1815.

NOTE SUR UNE SÉRIE

(voir t. VIII, p. 421);

PAR M. TREMOIL (DE VILLEFRANCHE).

La somme de la suite

$$S = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n$$

a été déjà donnée dans ce Recueil.

On peut encore la présenter très-simplement de la manière suivante :

On a

$$a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1},$$

$$a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1} - a^2}{a - 1},$$

$$a^3 + \ldots + a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1} - a^3}{a - 1};$$

$$a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1} - a^{n-1}}{a - 1},$$

$$a^n = \frac{a^{n+1} - a^n}{a - 1}.$$

En ajoutant

$$S = \frac{na^{n+1} - (a + a^2 + \ldots + a^n)}{a - 1} = \frac{a^{n+1}[n(a-1) - 1] + a}{(a-1)^2}.$$

C. Q. F. D.

RÈGLE POUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION $ax + by = c$

(voir t. III, p. 97, et t. IV, p. 146);

PAR M. DIEU,
Docteur ès sciences mathématiques et agrégé de l'Université (Dijon).

Soient a, b et c trois nombres entiers premiers entre eux, $a < b$, et $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}, r_n$ les restes successifs formés par la recherche du plus grand commun diviseur de b et de a.

On démontre que la solubilité en nombres entiers de l'équation

(1) $$ax + by = \pm c$$

dépend de celle des équations

(2) $$\left\{\begin{array}{l} r_1 y + a t_1 = \pm c, \\ r_2 t_1 + r_1 t_2 = \pm c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_k t_{k-1} + r_{k-1} t_k = \pm c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_n t_{n-1} + r_{n-1} t_n = \pm c; \end{array}\right.$$

de sorte qu'il est nécessaire et suffisant que la dernière des équations (2) soit soluble en nombres entiers, pour que celles qui la précèdent le soient aussi.

La condition nécessaire et suffisante de solubilité de la dernière équation (2) étant évidemment que

$$r_n = 1,$$

celle de l'équation (1) est que a et b soient premiers entre

5.

eux, et l'on étend cette conclusion aux cas où les coefficients de x et de y auraient des signes quelconques, par un raisonnement fort simple, qu'il est inutile de rappeler ici.

r_n étant égal à 1, si l'on représente par $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}$ les quotients de la recherche du plus grand commun diviseur de a et de b, les équations (1) et (2) peuvent être remplacées par les $n+1$ équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} t_{n-1} &= -q_{n+1}t_n \pm c,\\ t_{n-2} &= -q_n t_{n-1} + t_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ t_{i-2} &= -q_i t_{i-1} + t_i,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ t_1 &= -q_3 t_2 + t_3,\\ y &= -q_2 t_1 + t_2,\\ x &= -q_1 y + t_1; \end{aligned}\right.$$

et si l'on élimine entre elles les $n-1$ indéterminées, $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, on aura deux équations entre x, y et t_n.

Cette élimination s'exécute par des substitutions successives, et il résulte de la forme des équations (3), qu'elle doit conduire à

$$y = \mathrm{B}.(\pm c) + \mathrm{B}'t_n,$$

et

$$x = \mathrm{A}\ (\pm c) + \mathrm{A}'t_n;$$

A′ et B′ étant des fonctions de tous les quotients $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}$, et A et B des fonctions des n premiers quotients seulement.

Or, avec un peu d'attention, on reconnaît que les coefficients A et B s'obtiendront par la règle suivante :

Écrivez sur une ligne 1, *et dans un ordre inverse à celui dans lequel on les obtient, les quotients de la*

recherche du plus grand commun diviseur de a et de b, en exceptant le dernier de ces quotients.

Répétez, sur une ligne parallèle à celle-là, les deux premiers nombres 1 *et* q_n; *multipliez le deuxième nombre* q_n *par le troisième nombre* q_{n-1} *de la première ligne, et ajoutez au produit le premier nombre* 1 *de la seconde ligne; puis, continuez de la même manière, jusqu'à ce que vous ayez autant de nombres sur la seconde ligne que sur la première; de sorte que si* N_m *et* N_{m+1} *sont le* $m^{\text{ième}}$ *et le* $(m+1)^{\text{ième}}$ *nombres de la seconde ligne, le suivant sera*

$$N_{m+1} \times q_{n-m} + N_m.$$

Le dernier nombre calculé pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant qu'il occupera un rang impair ou un rang pair, sera le coefficient A; et l'avant-dernier, pris avec un signe contraire, sera le coefficient B.

Quant aux nombres précédents, pris de même avec le signe + ou avec le signe —, suivant leur rang respectif, ce sont les coefficients de $\pm c$ dans les expressions de $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ en fonctions de t_n; mais on n'en a pas besoin.

Cela s'applique, avec une légère modification, au calcul de A′ et de B′, et l'on pourrait prouver, par cette voie, que

$$A' = \pm b \quad \text{et} \quad B' = \mp a.$$

Dans le cas où l'équation à résoudre serait de la forme

$$ax - by = \pm c,$$

il suffirait de changer le signe de la valeur obtenue pour b par l'application de la règle précédente.

Enfin, si a était supérieur à b au lieu d'être moindre, on appliquerait le dernier nombre à l'inconnue y, et l'avant-dernier à l'inconnue x. Exemple :

$$785x - 432y = 739.$$

Les quotients fournis par la recherche du plus grand commun diviseur sont

$$1,\ 1,\ 4,\ 2,\ 7,\ 2 \text{ et } 2.$$

Il faut donc écrire

$$1,\ 2,\ 7,\ 2,\ 4,\ 1,\ 1;$$

d'où l'on tire, par la règle ci-dessus,

$$1,\ 2,\ 15,\ 32,\ 143,\ 175,\ 318.$$

Le dernier nombre étant de rang impair, il faudrait le prendre avec le signe + si le coefficient de y était positif; mais, comme ce coefficient est négatif, on doit changer le signe : on aura donc la solution particulière

$$x = -175.739, \quad y = -318.739;$$

d'où

$$x = -235002 + 432t, \quad y = -129325 + 785t,$$

que l'on réduit à

$$x = -157 + 432t, \quad y = -287 + 785t,$$

en remplaçant t par $299 + t$ (*).

MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE POUR RÉSOUDRE QUELQUES QUESTIONS SUR LES MAXIMUMS

(voir t. II, p. 417, et t. III, p. 168);

Par M. H. GRILLET,

Professeur de mathématiques supérieures au lycée de Brest.

Lorsque plusieurs facteurs variables ont une somme constante, et qu'ils ne sont d'ailleurs assujettis à remplir

(*) Nous engageons le lecteur à chercher ces formules par une autre voie, et à comparer.

aucune autre condition, on démontre facilement que le produit de ces facteurs est maximum quand tous sont égaux.

En établissant de nouvelles relations entre ces facteurs, on ne saurait écarter les limites entre lesquelles peut varier leur produit; si donc ils peuvent encore devenir égaux, leur produit est alors un maximum.

Cette remarque va nous permettre de déterminer les maximums d'une expression de la forme

$$(1) \qquad (a+x)^m (b+x)^n \ldots (a'-x)^{m'} (b'-x)^{n'} \ldots,$$

où a, b,..., a', b',..., désignent des quantités positives, m, n,..., m', n',..., des nombres entiers et positifs.

En effet, considérons l'expression

$$(2) \qquad \left(\frac{a+x}{A}\right)^m \left(\frac{b+x}{B}\right)^n \ldots \left(\frac{a'-x}{A'}\right)^{m'} \left(\frac{b'-x}{B'}\right)^{n'} \ldots,$$

dans laquelle A, B,..., A', B',..., représentent des constantes arbitraires.

Si nous pouvons trouver des valeurs de A, B,..., A', B',..., qui rendent constante et positive la somme des $(m+n+\ldots+m'+n'\ldots)$ facteurs du premier degré, dont l'expression (2) est le produit, et qui permettent d'égaler ces facteurs les uns aux autres, ces valeurs de A, B,..., A', B',..., donneront, pour l'expression (2), une fonction de x, qui atteindra son maximum lorsque ses $(m+n+\ldots+m'+n'\ldots)$ facteurs seront tous égaux.

Pour que la somme des facteurs de l'expression (2) soit constante, il faut évidemment que l'on ait

$$(3) \qquad \frac{m}{A}+\frac{n}{B}+\ldots=\frac{m'}{A'}+\frac{n'}{B'}+\ldots,$$

et, pour que ces facteurs soient égaux,

$$(4) \qquad \frac{a+x}{A}=\ldots=\frac{a'-x}{A'}=\frac{b'-x}{B'}=\ldots.$$

Il s'agit de trouver des valeurs de A, B,..., A', B',..., et de x propres à vérifier les équations (3) et (4).

On peut commencer par chercher x, et l'équation qui en donnera la valeur est facile à former; il suffit de remplacer, dans l'équation (3), les quantités A, B,..., A', B',..., par $(a+x)$, $(b+x)$,..., $(a'-x)$, $(b'-x)$,..., qui doivent leur être proportionnelles en vertu des équations (4). On trouve ainsi

$$(5)\qquad \frac{m}{a+x}+\frac{n}{b+x}+\ldots=\frac{m'}{a'-x}+\frac{n'}{b'-x}+\ldots.$$

Je dois prouver que toute valeur réelle de x, tirée de l'équation (5), peut donner pour l'expression (2) un maximum. En effet, portons cette valeur de x dans $(a+x)$, $(b+x)$,..., $(a'-x)$, $(b'-x)$,..., et donnons à A une valeur quelconque de même signe que $(a+x)$; les proportions (4) détermineront, pour B,..., A', B',..., des valeurs de mêmes signes que $(b+x)$,..., $(a'-x)$, $(b'-x)$,....

Nous aurons donc, dans l'expression (2), un produit de facteurs dont la somme est constante. Nous aurons aussi une valeur particulière de x qui rend tous ces facteurs égaux et positifs. Leur somme est donc positive, et, comme ils sont égaux, leur produit est maximum.

Les expressions (1) et (2) ne diffèrent que par un facteur constant. Si ce facteur est positif, elles atteindront ensemble leur maximum; s'il est négatif, la première sera minimum quand la seconde sera maximum. Or ce facteur constant est de même signe que l'expression (1) quand on y remplace x par la valeur particulière tirée de l'équation (5); donc toute valeur réelle de x tirée de l'équation (5) rendra l'expression (1) maximum ou minimum, suivant qu'elle la rendra positive ou négative.

Il est facile de voir que, si l'expression (1) renferme k

facteurs différents, l'équation (5) sera tout au plus du degré $(k-1)$.

La méthode précédente peut donner la solution de plusieurs problèmes. Nous en citerons un seulement, la recherche du cône de surface totale maximum inscrit dans une sphère donnée.

Note. L'équation (5) est la dérivée égalée à zéro de la fonction (1).

SOLUTION DE LA QUESTION 213

(voir t. VIII, p. 392);

PAR M. JAUFROID,
Bachelier ès sciences mathématiques.

$$1.(1-x)(1-x^2)(1-x^3) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

ou

$$a_n = -\frac{S(n)}{n},$$

$S(n)$ désigne la somme des diviseurs du nombre n.

Solution. On a

$$\begin{aligned} s &= 1.(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots, \\ &= 1.(1-x) + 1.(1-x^2) + 1.(1-x^3) + \ldots, \end{aligned}$$

$$1.(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right),$$

$$1.(1-x^2) = -\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \ldots\right),$$

$$1.(1-x^3) = -\left(x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \ldots\right),$$

$$1.(1-x^n) = -\left(x^n + \frac{x^{2n}}{2} + \frac{x^{3n}}{3} + \ldots\right).$$

Substituant, nous aurons

$$s = -\left\{\begin{array}{l} (x + x^2 + x^3 + \ldots) + \frac{1}{2}(x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) \\ + \frac{1}{3}(x^3 + x^6 + x^9 + \ldots) + \ldots \\ + \frac{1}{n}(x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots) + \ldots \end{array}\right\},$$

ou bien, en représentant la première parenthèse par P_1, la deuxième par P_2, la troisième par $P_3, \ldots,$ et la $n^{ième}$ par P_n,

$$s = -\left(P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3 + \ldots + \frac{1}{n}P_n + \ldots\right).$$

P_1 contient toutes les puissances de x, P_2 toutes celles de x^2, P_3 toutes celles de $x^3, \ldots,$ P_n toutes celles de x^n.

De plus, P_1 est multiplié par $\frac{1}{1}$, P_2 par $\frac{1}{2}$, P_3 par $\frac{1}{3}, \ldots,$ P_n par $\frac{1}{n}$.

Or considérons le premier terme de P_n; ce sera x^n, et ce terme ne se trouve plus dans le reste de P_n et dans les expressions suivantes P_{n+1}, $P_{n+2}, \ldots.$

Soit n' un diviseur de n; la suite $P_{n'}$ précède la suite P_n, et contient nécessairement x^n : en effet, les termes de $P_{n'}$ se forment en multipliant l'exposant de $x^{n'}$ respectivement par 2, 3, 4, ...; par conséquent, on aura en exposants tous les multiples de n', et, par suite, n. Par conséquent, le terme x^n est produit autant de fois que n a de diviseurs; et comme x^n provenant de $P_{n'}$ est multiplié par $\frac{1}{n'}$, il s'ensuit que le coefficient de x^n est une somme de fractions ayant pour numérateurs l'unité, et pour dénominateurs respectivement chacun des diviseurs de n, y compris l'unité. En multipliant les deux termes

de chaque fraction par le produit des dénominateurs de toutes les autres, on obtient au numérateur de la fraction résultante la somme de tous les diviseurs de n, et au dénominateur le produit de tous ces diviseurs, c'est-à-dire n; et comme il faut mettre le signe — devant tous les termes, on a bien, d'après la notation adoptée,

$$a_n = -\frac{S(n)}{n}.$$

C. Q. F. D.

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES;

Par M. Abel TRANSON.

I. — *Observations préliminaires.*

La prolixité des calculs qu'entraîne la théorie des fonctions symétriques a retardé jusqu'ici son introduction dans l'enseignement élémentaire. En effet, l'une des deux méthodes que renferment nos Traités d'algèbre exige que, pour calculer une fonction symétrique des racines d'une équation donnée, on l'exprime d'abord au moyen des sommes de puissances semblables de ces mêmes racines; et cette transformation peut déjà constituer à elle seule une longue opération. Après quoi il faut calculer successivement toutes les sommes de puissances semblables, depuis celles du premier degré jusqu'à celles du degré le plus élevé que comporte la fonction transformée, sans en manquer une, puisque chacune d'elles dépend des sommes de degré inférieur; enfin, substituer dans la fonction transformée les valeurs des sommes qu'elle renferme. L'autre méthode, due à M. Cauchy, très-précieuse par

les avantages théoriques qui lui sont propres, ne fait rien gagner sous le rapport de la brièveté. A la vérité, elle n'exige pas une transformation préalable; mais, au lieu d'opérer sur des symboles sommatoires, comme la première méthode, elle veut que la fonction proposée soit écrite en totalité, c'est-à-dire avec toutes les lettres $a, b, \ldots, k, l$ représentatives des racines de la proposée, ce qui donnera lieu presque toujours à un polynôme d'une longueur rebutante. Après cela, si $F(x) = 0$ est l'équation proposée, que je supposerai de degré m, il faut construire les $m - 1$ polynômes auxiliaires

$$\frac{F(x)}{x-a} = F_1(x); \quad \frac{F_1(x)}{x-b} = F_2(x), \ldots; \quad \frac{F_{m-2}(x)}{x-k} = F_{m-1}(x).$$

Et enfin, à l'aide de m divisions, où les polynômes suivants, en nombre égal,

$$F_{m-1}(l); \quad F_{m-2}(k), \ldots; \quad F_2(c); \quad F_1(b); \quad F(a),$$

sont employés comme diviseurs, on parvient à faire disparaître de la fonction proposée toutes les lettres $a, b, \ldots, k, l$.

Non-seulement ces longueurs font obstacle à l'enseignement de la théorie des fonctions symétriques dans les cours élémentaires; mais, comme elles rendent très-laborieuse la détermination effective de ces mêmes fonctions, il arrive que cette théorie, d'où nous tirons à peu près toutes nos connaissances sur les résultats généraux de l'élimination, est mise presque infailliblement de côté dans la pratique. D'après cela, les lecteurs des *Nouvelles Annales* verront, sans doute, avec intérêt qu'il est possible de simplifier très-notablement la théorie en question. Il suffit, pour cela, d'étendre convenablement un théorème d'algèbre déjà connu, et qui, à lui seul, constitue la nouvelle méthode par rapport à une classe très-étendue de fonctions.

II. — *Nouvelle méthode pour le calcul des fonctions symétriques.*

Dans une note, insérée à la page 169 du premier volume de ce Recueil, M. Desmaret a fait usage du théorème suivant : *Pour avoir la somme des valeurs que prend une fonction entière* $\varphi(x)$, *dans laquelle on remplace* x *successivement par toutes les racines de l'équation*

$$F(x) = 0,$$

il faut effectuer la division indiquée par l'expression $\frac{F'(x)\varphi(x)}{F(x)}$: *la somme en question sera le coefficient du terme de ce quotient, dans lequel l'exposant de* x *est* -1 ; *ou bien, ce qui est la même chose, ce sera le coefficient du premier terme du reste, si l'on arrête l'opération après avoir déterminé au quotient le terme indépendant de* x.

En effet, comme on a l'identité

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots,$$

il s'ensuit

$$\frac{F'(x).\varphi(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{x-b} + \ldots = \pi(x) + \frac{\varphi(a)}{x-a} + \frac{\varphi b}{x-b} + \ldots,$$

où $\pi(x)$ est une fonction entière; et, dès lors, on a évidemment

$$\frac{F'(x).\varphi(x)}{F(x)} = \pi(x) + \frac{x^{m-1}\sum \varphi a + \ldots}{F(x)};$$

ce qui démontre le théorème.

Au lieu d'employer la division, on peut, à l'aide de l'équation $F(x)=0$, abaisser le degré du produit $F'(x)\varphi(x)$ jusqu'à être de degré inférieur d'une unité à celui de cette

même équation. Pour cela, il suffit de remarquer que, si $F(x)=0$ est du degré m par exemple, on peut en déduire x^m, et toutes les puissances supérieures à la $m^{ième}$, en fonction de x^{m-1} et des puissances inférieures. Et alors, le coefficient de x^{m-1}, dans le produit $F'(x)\,\varphi(x)$ ainsi préparé, sera précisément égal à la somme demandée. J'appellerai ce second procédé *abaissement* ou *réduction*.

Voilà donc un moyen très-direct pour calculer la fonction symétrique

$$\varphi(a)+\varphi(b)+\ldots+\varphi(l);$$

a, b,..., l étant les racines d'une équation donnée.

Il est fort à regretter que M. Desmaret n'ait pas donné suite à son travail, puisqu'en présentant le théorème ci-dessus, avec toute l'extension dont il est susceptible, il en aurait pu déduire une méthode très-générale et très-expéditive pour le calcul de toute fonction symétrique.

Afin de justifier cette assertion, on va donner ici la marche à suivre pour le calcul d'une fonction dont la forme générale renferme explicitement deux ou trois lettres; et le lecteur étendra aisément la méthode au cas d'un plus grand nombre de lettres. De plus, je supposerai d'abord très-expressément qu'il s'agit de *fonctions entières*.

Supposons donc qu'il s'agisse de calculer la fonction symétrique dont le terme général est $\varphi(a, b)$; c'est-à-dire qu'on veut trouver la somme des valeurs que prend la fonction $\varphi(y, z)$, lorsqu'on y remplace successivement y et z par les racines d'une équation donnée $Fx=0$. Ces racines combinées deux à deux de toutes les manières possibles, la fonction dont il s'agit aura pour symbole

$$\sum\varphi(y, z).$$

Il se doit entendre que la fonction algébrique entière

$\varphi(y, z)$ se compose de termes dans chacun desquels entrent y et z comme facteurs avec des exposants d'ailleurs quelconques, mais sans que l'un des deux exposants puisse être nul; car, s'il y avait de tels termes, c'est que la fonction proposée renfermerait une fonction symétrique de la nature de celles qu'on a examinées précédemment, dont le symbole est

$$\sum \varphi(y);$$

et l'on en ferait le calcul à part au moyen du théorème rapporté ci-dessus.

Donc, pour construire

$$\sum \varphi(y, z),$$

je fais premièrement le quotient de $F(x)$ par $x - a$, où a est censé être une des racines de la proposée. Soit ce quotient égal à $F_1(x)$; ses coefficients seront des fonctions entières de la lettre a, et l'équation

$$F_1(x) = 0$$

aura pour racines toutes celles de la proposée, moins la racine a.

C'est pourquoi le coefficient de x^{-1}, dans le quotient

$$\frac{F'_1(x) . \varphi(a, x)}{F_1(x)},$$

sera la somme suivante :

$$\varphi(a, b) + \varphi(a, c) + \ldots + \varphi(a, l).$$

Maintenant, si l'on représente ce coefficient par $\psi(a)$, il n'y aura plus qu'à effectuer la somme des valeurs

$$\psi(a) + \psi(b) + \ldots + \psi(l),$$

ce qu'on obtiendra par la division de l'expression

$$\frac{F'(x) \ \psi(x)}{F(x)},$$

ou par la réduction du produit $F'(x) \ \psi(x)$.

Si l'on veut calculer la fonction à trois lettres

$$\sum \varphi(y, z, u),$$

où l'on doit remplacer y, z et u successivement par toutes les racines de $F(x) = 0$, combinées trois à trois de toutes les manières possibles, on construira le polynôme

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)} = F_2(x),$$

fonction entière, parce que a et b sont des racines de la proposée; fonction où les coefficients de x sont eux-mêmes des fonctions entières de a et b.

La réduction, au moyen de l'équation $F_2(x) = 0$, du produit

$$F'_2(x)\,\varphi(a, b, x)$$

donnera la somme des valeurs obtenues en substituant à x, dans $\varphi(a, b, x)$, toutes les racines de la proposée, moins les racines a et b. Le résultat sera une fonction entière de a et b, que je représente par $\psi(a, b)$; et il restera à calculer la somme des valeurs que prend la fonction $\psi(y, z)$, lorsqu'on y substitue successivement à la place de y et z toutes les racines de $F(x) = 0$ combinées deux à deux; ce qui ramène au cas précédent.

En résumé, si la forme de la fonction symétrique ne comporte qu'une seule lettre, il y a une seule division à faire; si elle comporte deux lettres, deux divisions, et ainsi de suite.

En outre, pour le cas de *deux* lettres, on doit former *une* fonction auxiliaire $\frac{F(x)}{x-a} = F_1(x)$; pour celui de *trois* lettres, *deux* fonctions auxiliaires, savoir, la précédente $F_1(x)$, et une seconde $\frac{F_1(x)}{x-b} = F_2(x)$; etc.

Ces fonctions sont celles qu'emploie aussi la méthode de M. Cauchy, avec la différence que M. Cauchy les construit toutes, quelle que soit la fonction à calculer. Je pourrai faire voir, dans une autre occasion, que chacune de ces fonctions auxiliaires peut s'écrire couramment, c'est-à-dire sans division et sans passer par les précédentes; à peu près comme on écrirait une fonction dérivée: ce qui n'est pas indifférent dans la pratique. Enfin, on verra, plus loin, que le nombre, déjà si restreint de divisions à effectuer, peut encore être diminué dans des cas très-étendus (*voir* ci-après, § V, page 87).

J'ai supposé expressément des *fonctions symétriques entières*; mais la méthode sera complétée, à cet égard, par le résultat important que M. Serret a donné dans son *Cours d'Algèbre supérieure*; savoir, que toute fonction rationnelle fractionnaire d'une ou plusieurs des racines d'une équation donnée se ramène, *par de simples divisions algébriques*, à une fonction entière. Et comme ce résultat, combiné avec la méthode ci-dessus, procure une démonstration nouvelle d'un très-beau théorème, je prie le lecteur de s'y arrêter un instant.

III. — *Démonstration d'un théorème d'algèbre.*

Soit à calculer la fonction

$$\sum \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

où le symbole sommatoire s'étend à toutes les racines d'une équation donnée $F(x) = 0$. On voit d'abord que $\psi(x)$ et $F(x)$ doivent être premiers entre eux; sans quoi la somme demandée aurait un ou plusieurs termes infinis. D'après cela, si l'on applique aux deux fonctions $F(x)$ et $\psi(x)$ la méthode du plus grand commun diviseur,

on est assuré d'arriver à un reste indépendant de x, que je représenterai par R_n. D'autre part, comme on doit remplacer x exclusivement par des racines de $F(x) = o$, on verra bien que tous les restes de l'opération du plus grand commun diviseur, et, en particulier, le dernier reste R_n se trouvent exprimés par le produit de deux fonctions entières, dont l'une est $\psi(x)$; de sorte qu'on a

$$R_n = \psi(x)\,\theta(x),$$

$\theta(x)$ étant une fonction entière de x : et ainsi la question proposée revient au calcul de la fonction symétrique entière

$$\frac{1}{R_n}\sum \varphi(x)\,\theta(x).$$

De là on peut déduire la démonstration du théorème suivant, que, *si $\psi(x)$ désigne un polynôme quelconque du degré $m - 1$, la somme*

$$\sum \frac{\psi(x)}{F'(x)},$$

étendue aux racines de l'équation (de degré m et sans racines égales)

$$F(x) = o,$$

a pour valeur le coefficient de x^{m-1} dans ψx.

En effet, le calcul de $\sum \frac{\psi(x)}{F'(x)}$ revient, d'après ce qui précède, à celui de la fonction entière $\sum \frac{\psi(x)\,\theta(x)}{R_n}$, où R_n est un nombre avec la relation

$$R_n = \theta(x)\; F'(x).$$

D'un autre côté, il résulte de la nouvelle méthode pour les fonctions symétriques que la fonction entière $\sum \frac{\psi(x)\,\theta(x)}{R_n}$

sera exprimée par le coefficient de x^{-1} dans le quotient

$$\frac{\psi(x).\theta(x)}{R_n}\cdot\frac{F'(x)}{F(x)};$$

ou, à cause de la valeur de R_n, dans le quotient

$$\frac{\psi(x)}{F(x)}.$$

Et puisqu'on a supposé $\psi(x)$ du degré $m-1$, la somme en question sera bien, comme on l'a annoncé, le coefficient du premier terme de $\psi(x)$.

Et d'après cela, si $\psi(x)$ est de degré inférieur à $m-1$, la fonction symétrique

$$\sum\frac{\psi(x)}{F'(x)},$$

étendue à toutes les racines de l'équation de degré m $F(x)=0$, sera nulle.

Ces théorèmes résultent, si l'on veut, de la décomposition des fractions rationnelles. Mais on sait que, réciproquement, M. Liouville, après les avoir établis à priori, en a déduit, avec une rare facilité, cette même décomposition (1). C'est pourquoi il y avait quelque intérêt à en donner une démonstration purement algébrique.

IV. — *Démonstration d'une propriété fondamentale des fonctions symétriques.*

Le lecteur a pu remarquer que la nouvelle méthode possède, comme celle de M. Cauchy, l'avantage de démontrer directement que toute fonction symétrique entière est elle-même une fonction entière des coefficients, sans aucun diviseur numérique; puis qu'on l'obtient par de simples divisions algébriques, où le coefficient du premier terme dans les diviseurs est toujours égal à l'unité.

(*) Voir *Nouvelles Annales*, tome VI, page 127.

Mais il est une autre propriété des fonctions symétriques entières, propriété dont on fait usage dans la théorie de l'élimination, et qu'il faut déduire aussi de la méthode elle-même. Voici en quoi consiste cette propriété.

Écrivons l'équation proposée sous la forme

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0;$$

et si l'on donne une fonction rationnelle et entière des lettres $p_1, p_2, \ldots, p_m$, on pourra faire, dans chacun de ses termes, la somme des indices des lettres p, en ayant soin de compter l'indice d'une même lettre autant de fois que cette lettre sera facteur. Cette somme faite sera l'*indice* du terme que l'on considère. C'est ainsi que les monômes

$$p_1^2 \cdot p_2; \qquad p_1 p_2 p_3; \qquad p_2^3 p_m$$

ont respectivement pour indices les nombres suivants :

$$4; \qquad 6; \qquad 6 + m.$$

Cette opération ainsi faite sur chaque terme, la somme la plus grande qu'on aura obtenue marquera l'*indice* de la fonction.

Or, si l'on donne la forme générale d'une fonction symétrique entière à une, ou deux, ou trois, etc., lettres, le *degré* de cette fonction est marqué, comme à l'ordinaire, par le plus haut exposant s'il y a une seule lettre, ou la plus haute somme d'exposants s'il y a plusieurs lettres.

D'autre part, quand la fonction a été calculée, elle est exprimée en fonction rationnelle et entière des lettres $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Elle a donc un certain *indice*.

Le théorème qu'il s'agit de démontrer est le suivant :

L'indice d'une fonction symétrique est égal à son degré.

Considérons premièrement une fonction symétrique à

une seule lettre, c'est-à-dire dont le symbole général est

$$\sum \varphi(x).$$

Comme la forme générale $\varphi(x)$ ne peut être que la somme de plusieurs puissances de x affectées respectivement de divers coefficients, il suffit de faire la démonstration dont il s'agit pour la fonction monôme

$$\sum A x^n,$$

où A est un nombre.

Pour obtenir cette fonction, il faut effectuer la division indiquée par

$$\frac{A m x^{m-1+n} + A(m-1)p_1 x^{m-2+n} + A(m-2)p_2 x^{m-3+n} + \dots}{x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots}.$$

Or, si l'on représente le quotient par

$$q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \dots + q_{r-1} x^{n-r} + q_r x^{n-r-1} + \dots,$$

on aura, d'après les règles de la division algébrique,

$$q_r = -p_1 q_{r-1} - p_2 q_{r-2} - \dots - p_r q_0 + (m-r) A p_r.$$

Or, q_0 étant égal à mA, a pour indice *zéro*; donc les coefficients suivants, considérés comme fonctions des lettres p,

$$q_1 = -p_1 q_0 + A(m-1)p_1,$$
$$q_2 = -p_1 q_1 - p_2 q_0 + A(m-2)p_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$q_r = -p_1 q_{r-1} - \dots,$$

ont respectivement pour indices les nombres 1, 2, ..., r. Donc enfin le coefficient de x^{-1}, qui sera représenté par q_n, et qui est la valeur de la fonction proposée de degré n, a pour indice le même nombre n.

Il est manifeste que si le coefficient A était lui-même une fonction rationnelle et entière des lettres p, son indice marquerait celui de q_0, et, par conséquent, s'ajouterait

à r pour former celui de q_r. Ainsi, l'indice de la fonction symétrique

$$A \sum x^n$$

sera égal à $n + n'$, si n' est l'indice de A.

A l'égard des fonctions à deux lettres, il suffit également de faire la démonstration, pour une fonction monôme telle que

$$\sum a^n b^{n'}.$$

Or, d'après les règles exposées, il faut effectuer d'abord la réduction du produit

$$a^n x^{n'} F'_1(x),$$

au moyen de l'équation auxiliaire $F_1(x) = o$, et vu la forme de $F_1(x)$, savoir,

$$x^{m-1} \left.\begin{array}{l} + a \\ + p_1 \end{array}\right| x^{m-2} \left.\begin{array}{l} + a^2 \\ + p_1 a \\ + p_2 \end{array}\right| x^{m-3} + \ldots$$

il sera aisé de voir que cette réduction donnera une fonction ψa telle, qu'en chacun de ses termes le degré de a uni à l'indice de la lettre p fera une somme égale à $n + n'$; de sorte que la réduction qu'il faudra faire ensuite, c'est-à-dire la réduction de

$$\psi(x) F'(x),$$

au moyen de $F(x) = o$, donnera nécessairement une fonction de l'indice $n + n'$.

Cette démonstration s'étendra de la même manière au cas d'un plus grand nombre de lettres.

Si l'on opère sur l'équation générale de degré m à deux inconnues x et y, les indices des coefficients de x marquent le degré de chacun d'eux en y. Par suite, le théorème qu'on vient de démontrer fait connaître le degré

en y de toute fonction symétrique des valeurs

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m,$$

qui satisfont à l'équation proposée; et c'est pourquoi ce théorème joue un grand rôle dans la théorie de l'élimination : mais nous pouvons aussi en tirer un moyen d'abréger, dans certains cas, le calcul des fonctions symétriques.

V. — *Abréviations et exemples.*

Première abréviation. Soit n le degré de la fonction symétrique. Si n est moindre que m, on peut supprimer dans $F(x)$, dans $F_1(x)$, $F_2(x)$, etc., comme aussi dans $F'(x)$, $F'_1(x)$, $F'_2(x)$, etc., tous les coefficients dont l'indice est supérieur à n. Cela résulte manifestement du théorème ci-dessus démontré.

Deuxième abréviation. — A la proposition que nous avons prise pour point de départ, on peut ajouter les suivantes, dont le lecteur trouvera aisément la démonstration :

1°. La somme des valeurs que prend la fonction entière $a.\varphi(b)$, dans laquelle on remplace successivement a et b par toutes les racines de $F(x)=0$ combinées deux à deux de toutes les manières possibles, est égale au second terme du reste dans la division de $F'(x)\ \varphi(x)$ par $F(x)$, ce second terme pris en signe contraire.

2°. Le coefficient du troisième terme, dans le même reste, ce coefficient pris d'ailleurs avec son signe, sera la valeur de $\sum a.b.\varphi(c)$; celui du quatrième terme, pris en signe contraire, donnera la valeur de $\sum a.b.c.\varphi(d)$, etc., et ainsi de suite.

D'après cela, si les formes générales $\varphi(a, b)$, $\varphi(a, b, c)$, etc., se réduisent à $a.\psi(b)$, $a.b.\psi(c)$, etc., il

n'y aura pas *deux ou trois* divisions à faire, mais *une seule*. Et de même, si la forme $\varphi(a, b, c)$ revient à la suivante $a\psi(b, c)$, il n'y aura pas lieu d'employer la seconde fonction auxiliaire, mais seulement la première; il n'y aura pas *trois* divisions à faire, mais *deux* seulement, et ainsi de suite.

En un mot, toute lettre qui entre dans $\varphi(a, b, \ldots)$, comme facteur de tous les termes et avec l'exposant 1, ne nécessite pas une division de plus, ainsi que la méthode générale semblait l'indiquer d'abord. Elle exige seulement que l'on considère un terme de plus dans le reste de la division qu'on effectue.

Troisième abréviation. Comme on ne veut obtenir de chaque division ou réduction qu'un terme unique, et dont le degré est connu d'avance, on s'abstiendra d'écrire tous les résultats partiels de calcul qui seraient relatifs aux termes de degré moindre, et cette attention simplifiera beaucoup le travail du calculateur.

Exemple. On demande la détermination de $\sum a^2b$, avec l'équation générale

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + \ldots = 0.$$

Il n'y aura ici qu'une seule division à faire; on n'aura à tenir compte que des quatre premiers termes de l'équation donnée. On n'écrira rien de ce qui devrait affecter les termes du reste au delà du second, c'est-à-dire au delà du terme qui est affecté de la première puissance de x dans le dividende, après qu'on a supprimé préalablement les puissances de x communes à tous les termes du dividende et du diviseur;

$$\begin{array}{r|r|l|l} mx^4 + (m-1)p_1x^3 + (m-2)p_2 & x^2 + (m-3)p_3 & x & \underline{x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3}. \\ + p_1^2 & + p_1p_2 & & mx - p_1 \end{array}$$

Ainsi le second terme du reste étant $-3p_3+p_1p_2$, on a donc

$$\sum a^2 b = 3p_3 - p_1 p_2.$$

On vérifiera aisément ce résultat par la transformation très-facile de la fonction proposée en sommes de puissances semblables. Et ensuite le lecteur pourra mieux apprécier l'avantage de la nouvelle méthode, en s'exerçant sur quelque fonction moins simple, comme seraient

$$\sum a^2 bc, \quad \sum (a^3 + \alpha a^2)(b^2 + \beta b) cd,$$

où α et β sont des nombres donnés, et dont la première aurait exigé dans la division précédente seulement la conservation d'un terme de plus au dividende et au diviseur, tandis que la seconde s'obtiendra à l'aide de deux divisions.

Nota. La méthode ci-dessus exposée, pour le calcul des fonctions symétriques, a été communiquée à la Société Philomathique dans sa séance du 29 décembre 1849.

PROGRAMME D'UN COURS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

DEUXIÈME ARTICLE (voir page 14 de ce volume);

PAR M. C.-E. PAGE.

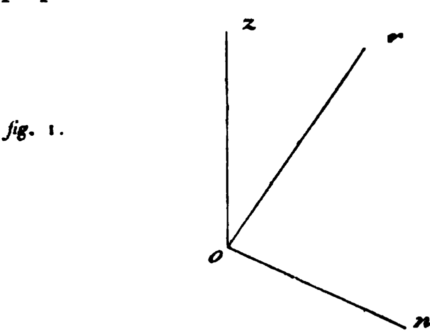
Mouvement de rotation autour d'un point fixe.

14. Lorsqu'un corps ou un système de points liés entre eux d'une manière invariable est assujetti à tourner autour d'un point fixe, on peut se représenter tous ses mouvements, en supposant qu'il tourne autour d'un axe choisi arbitrairement, mais qui lui est invariablement

lié tandis que cet axe lui-même tourne autour du point fixe.

Or on obtient tous les mouvements possibles d'un axe tel que *or* (*fig.* 1) autour d'un point fixe *o*, en supposant qu'il tourne autour du point *o* dans le plan *roz*, tandis que ce plan lui-même tourne autour d'un axe fixe *oz*. Cela revient à faire tourner l'axe *or* autour d'un axe *on*, auquel il reste perpendiculaire, tandis que cet axe tourne autour d'un axe fixe *oz*, auquel il reste perperpendiculaire.

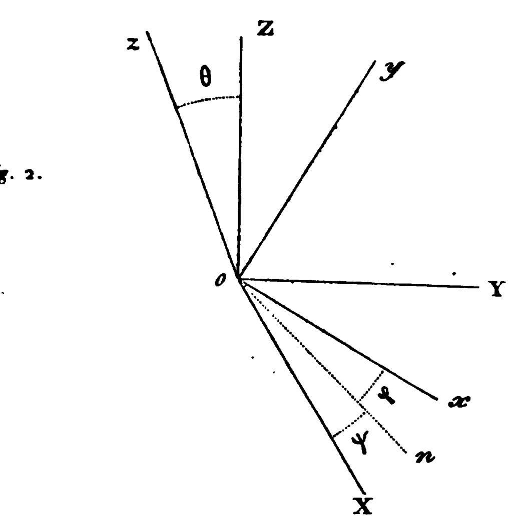
fig. 1.



Pour nous convaincre que tous les mouvements de rotation autour du point *o* peuvent être obtenus de cette manière, considérons un système de trois axes rectangulaires qui coïncidait primitivement avec celui des trois axes fixes *o*X, *o*Y, *o*Z (*fig.* 2), et qui est venu dans une position quelconque, *ox*, *oy*, *oz*. Pour faire passer les axes d'une de ces positions à l'autre, nous pouvons commencer par faire tourner le système autour de l'axe *o*Z, de manière que l'axe *ox*, qui coïncide d'abord avec l'axe fixe *o*X, vienne occuper la position *on*, après avoir décrit, dans le plan Y*o*X, l'angle $no\mathrm{X} = \psi$; puis, nous ferons tourner le système autour de la droite *on*, de manière que l'axe mobile *oz* décrive l'angle $zo\mathrm{Z} = \theta$; enfin, nous ferons

tourner le système autour de l'axe *oz*, de manière que l'axe *ox* décrive l'angle $nox = \varphi$. Il est évident qu'au lieu d'être successifs, ces trois mouvements peuvent être simultanés. Cela revient à faire tourner le système autour de l'axe mobile *oz*, tandis que cet axe tourne autour de l'axe *on*, en lui restant perpendiculaire, et que l'axe *on* tourne lui-même autour de l'axe fixe *oZ* en lui restant perpendiculaire.

fig. 2.



Lorsque l'on connaît la position des trois axes et leurs longueurs, c'est-à-dire les vitesses angulaires correspondantes, on peut en déduire la position de l'axe instantané de rotation, qui est représenté, comme nous l'avons vu, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélipipède construit sur ces axes. Lorsque l'on connaît la loi suivant laquelle varie la vitesse angulaire relative à chacun d'eux, on peut en déduire la série des positions par lesquelles ils passent; par suite, la série des positions que l'axe instantané occupe successivement dans l'espace et

dans le système mobile. Il en résulte deux surfaces coniques, l'une fixe dans l'espace, l'autre dans le système mobile; et l'on a une représentation exacte du mouvement, en faisant rouler la surface mobile sur la surface fixe.

Mouvement d'un système entièrement libre.

15. Lorsqu'un système de points liés entre eux d'une manière invariable se meut d'une manière quelconque dans l'espace, on décompose son mouvement en un mouvement de rotation autour d'un point pris arbitrairement pour centre, mais qu'on suppose invariablement lié au système, et un mouvement de translation de ce point. Cela revient à regarder à chaque instant la vitesse d'un point quelconque comme la résultante de deux autres vitesses, l'une égale et parallèle à la vitesse de translation du centre, l'autre due à la vitesse de rotation, par conséquent dirigée perpendiculairement au plan conduit par le point et par l'axe instantané, et égale à la vitesse angulaire multipliée par la distance de ce point à l'axe.

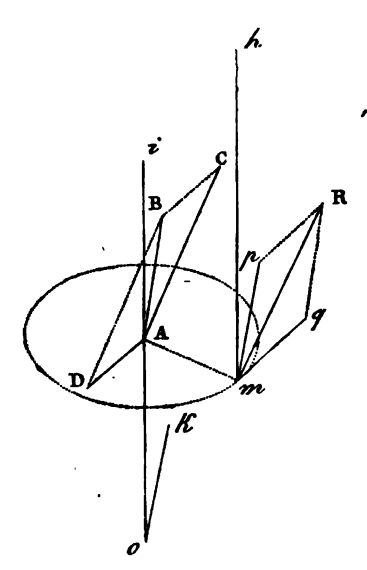
On peut se faire une image du mouvement, en supposant qu'une surface conique, dont le sommet est situé au point pris pour centre, et dont la forme dépend de la loi du mouvement de rotation, se meut parallèlement à elle-même d'un mouvement de translation, tandis qu'une seconde surface conique, qui a son sommet au même point, et à laquelle le système mobile est invariablement lié, roule sans glisser sur la première.

L'arête de contact de ces deux surfaces est l'axe instantané, dont tous les points ont une vitesse égale et parallèle à la vitesse du centre.

Le principe fondamental de cette décomposition consiste en ce que le mouvement de rotation reste toujours le même, quel que soit le point choisi pour centre. En effet, soient o (*fig.* 3) le centre, ok sa vitesse de translation,

oi l'axe instantané et ω la vitesse angulaire. Pour tous les points situés sur la direction de l'axe, la composante due au mouvement de rotation est nulle; par conséquent sa vitesse est égale et parallèle à *ok*. Pour un point quelconque *m*, pris hors de l'axe, la vitesse *m*R est la résultante de deux composantes, l'une, *mp*, égale et parallèle à *ok*, l'autre, *mq*, perpendiculaire au plan *iom* et égale à A*m*.ω. Tous les points d'une droite *mh*, menée par le point *m* parallèlement à l'axe *oi*, ont des vitesses égales et parallèles : car, pour tous ces points, les deux composantes sont égales et parallèles. Tout point situé hors de cette parallèle a une vitesse différente; car l'une des composantes reste toujours égale et parallèle à *ok*, tandis que l'autre est nécessairement différente de *mq*.

fig. 3



Maintenant, supposons que le point *m* soit pris pour centre; sa vitesse de translation est *m*R. Tous les points de la droite *oi* ont une même vitesse égale et parallèle à *ok*;

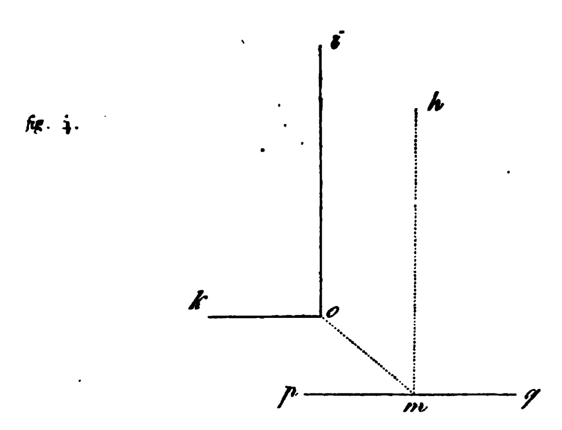
donc l'axe instantané est dirigé suivant une droite *mh*, parallèle à *oi*. Pour un point A de la droite *oi*, la vitesse AB, égale et parallèle à *ok*, est la résultante de deux composantes, l'une, AC, égale et parallèle à *m*R, l'autre, AD, perpendiculaire au plan *iom*. Or il est facile de voir que le second côté du parallélogramme, dont le premier côté est $AC = mR$, et la diagonale $AB = mp$, sera une droite AD égale et parallèle à *mq*, mais dirigée en sens contraire; d'où l'on conclut que la vitesse angulaire autour de *mh* est égale à la vitesse angulaire autour de *oi*, et dirigée dans le même sens.

Axe spontané.

16. S'il arrive qu'à un certain instant la vitesse de translation du centre soit dirigée perpendiculairement à l'axe instantané, les vitesses de tous les points sont perpendiculaires à cet axe; car, pour chaque point, les deux composantes lui sont perpendiculaires : de plus, il existe une droite qu'on suppose liée au système, et dont tous les points ont une vitesse nulle.

Soient *o* le centre (*fig.* 4), *ok* sa vitesse de translation, *oi* l'axe instantané perpendiculaire à *ok*; par le point *o* menons une droite *om* perpendiculaire au plan *koi*, et prenons la longueur *om* telle, que l'on ait $om . \omega = ok$: la vitesse du point *m* sera la résultante de deux vitesses, l'une, *mp*, égale et parallèle à *ok*, l'autre, *mq*, perpendiculaire au plan *iom*, par conséquent parallèle à *ok*, et égale à $om . \omega = ok$. Or nous pouvons toujours porter la longueur *om* en avant ou en arrière du plan *iom*, de manière que la composante *mq* soit dirigée en sens contraire de *ok*; les deux composantes *mp* et *mq* étant égales et de signes contraires, la vitesse du point *m* est nulle : donc tous les points de la droite *mh*, menée par le point *m* parallèlement à l'axe *oi*, ont une vitesse nulle, et les vitesses

de tous les autres points sont les mêmes que si le système tournait autour de la droite *mh* immobile pendant cet instant. Cette droite prend alors le nom d'*axe spontané de rotation*.

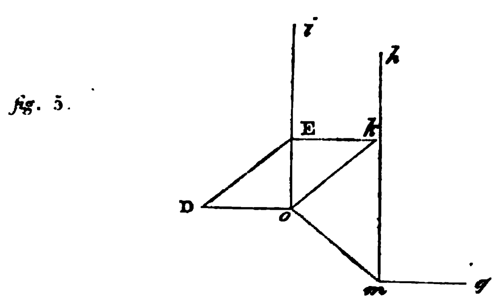


Tant que la vitesse de translation du centre n'est pas perpendiculaire à l'axe instantané, il ne peut exister aucun point lié au système dont la vitesse soit nulle. En effet, la composante, due à la vitesse angulaire, est toujours perpendiculaire à l'axe. Si la composante, due à la vitesse de translation, n'est pas perpendiculaire à ce même axe, elle ne peut jamais être directement opposée à la première; mais, dans ce cas, on peut toujours chercher la droite liée au système, et dont tous les points ont la plus petite vitesse.

Soient *o* le centre, *ok* sa vitesse de translation, *oi* l'axe instantané: la vitesse d'un point quelconque est la résultante de la vitesse *ok* et d'une autre composante menée par le point *o* perpendiculairement à *oi*. Cette résultante sera donc toujours une droite menée du point *o* à l'un des points du plan passant par le point *k* perpendiculairement à *oi*; or la ligne la plus courte qu'on puisse mener du

point o à ce plan est dirigée suivant oi, qui lui est perpendiculaire. Ce qui fait voir que la vitesse minima est dirigée parallèlement à l'axe instantané. Cherchons la droite dont tous les points ont une vitesse parallèle à oi; pour cela (*fig.* 5), achevons le parallélogramme dont ok est le premier côté et oE la diagonale, nous aurons la composante oD, due à la vitesse angulaire. Menons om perpendiculaire au plan Doi, prenons la longueur om telle, que l'on ait $om.\omega = o\mathrm{D}$, et portons cette longueur de manière que la composante mq soit dirigée en sens contraire de oD; tous les points de la droite mh, menée par le point m parallèlement à oi, auront une vitesse égale et parallèle à oE. Cette droite a été désignée, par M. Poinsot, sous le nom d'*axe spontané glissant,* parce que les vitesses de tous les points sont les mêmes que si le système glissait le long de cette droite en tournant autour d'elle.

fig. 5.



Il faut remarquer que cet axe change à chaque instant de position dans l'espace et dans le système mobile.

Centre des moyennes distances.

17. Lorsqu'un système est animé à la fois d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation, ses différents points ont, au même instant, des vitesses différentes en grandeur et en direction. Si l'on projette toutes ces vitesses sur une même droite, la moyenne de ces pro-

jections donne la vitesse de translation dans la direction de cette droite, et la direction suivant laquelle cette moyenne est la plus grande, donne justement la direction de la vitesse de translation générale du système.

Nous allons faire voir que, dans tout système de points liés entre eux d'une manière invariable, il existe un point unique dont la vitesse est toujours la moyenne des vitesses de tous les autres points, et dont le mouvement, par conséquent, représente le mouvement de translation de tout le système.

Pour cela, nous commencerons par démontrer que, dans tout système, il existe un point unique dont la distance à un plan quelconque est la moyenne des distances de tous les autres points du système au même plan. Pour cette raison, ce point est appelé *centre des moyennes distances*. (Nous le retrouverons plus loin sous les noms de *centre d'inertie* et *centre de gravité*.)

Nous démontrerons ensuite que, lorsque le centre des moyennes distances est pris pour centre de rotation, la somme des projections sur une droite quelconque de toutes les vitesses dues au mouvement de rotation est toujours nulle. Lorsque le mouvement du système est décomposé en un mouvement de rotation autour du centre des moyennes distances et un mouvement de translation de ce point, la vitesse de chaque point est la résultante d'une vitesse égale et parallèle à la vitesse de translation et d'une vitesse due à la rotation. Or la projection de la vitesse d'un point est égale à la somme des projections des deux composantes; la somme des projections de toutes les composantes dues à la rotation, étant nulle, il ne reste plus à considérer que les composantes dues au mouvement de translation. Toutes ces composantes étant égales et parallèles à la vitesse du centre, il est évident que cette vitesse est la moyenne des vitesses de tous les points.

THÉORÈMES

Sur l'équation aux carrés des différences des racines, et application géométrique aux faisceaux tangentiels;

D'APRÈS M. F. JOACHIMSTHAL.

(Journal de M. Crelle, t. XXXIII, p. 371, 1846; en français.)

1. *Lemme*. Soit

$$(1) \quad ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0$$

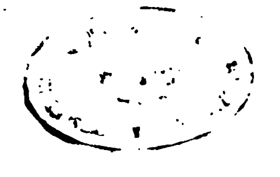
l'équation générale du $n^{ième}$ degré; représentons les racines par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Soient F une fonction symétrique entière des racines, et x_1^k la puissance la plus élevée de x_1 dans cette fonction; a^k F est une fonction entière des coefficients $a, a_1, a_2, \ldots$, de l'équation (1).

Démonstration. On sait que F est une fonction entière des quotients $\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}, \ldots, \frac{a_n}{a}$; si l'on remplace ces quotients par les *combinaisons* de racines, on retrouve identiquement la fonction F. Dans ces combinaisons, chaque racine n'entre qu'au premier degré; l'identité exige donc qu'il n'y ait pas un produit de plus de k de ces quotients : donc a^{-k} est la plus haute des puissances négatives de a; donc, etc.

Observation. Dans les ouvrages élémentaires, et même dans l'*Algèbre supérieure* de M. Serret, on suppose presque toujours $a = 1$; c'est une simplification à éviter: en particularisant, on ne raccourcit qu'en apparence.

2. THÉORÈME. *Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation* (1) *étant mul-*



tiplié par $a^{2(n-1)}$, est une fonction entière des coefficients de cette équation.

Démonstration. Représentons ce dernier terme par Δ_n; on a

$$\Delta_n = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_1 - x_n)^2 (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2 (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Dans cette fonction symétrique, la plus haute puissance de x_1 est $2(n-1)$; donc, d'après le lemme, etc.

3. Nous représentons par L la fonction entière $a^{2(n-1)}\Delta_n$, de sorte que $L = a^{2(n-1)}\Delta_n$. Soient B_n l'ensemble de tous les termes qui renferment a_n, et P les termes restants; on a donc $L = B_n + P$. Si, dans cette identité, on fait $a_n = 0$, B_n disparaît et P ne change pas; il est donc égal à ce que devient L, lorsqu'on y fait $a_n = 0$. Alors, une des racines de l'équation (1) devient nulle, et cette équation se réduit à celle-ci :

$$(2) \qquad ax^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x + a_{n-1} = 0.$$

Supposons que ce soit la racine x_n qui ait disparu, et représentons par Δ_{n-1} le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation (2). Soit Δ'_n et L' ce que deviennent Δ_n et L, en y faisant $x_n = 0$; or

$$\Delta'_n = (x_1 - x_2)^2 \ldots (x_{n-1} - x_{n-2})^2 x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1}^2 = \Delta_{n-1} \left(\frac{a_{n-1}}{a}\right)^2,$$

et

$$L' = a^{2(n-2)} (a_{n-1})^2 \Delta_{n-1} = (a_{n-1})^2 L_1,$$

où

$$L_1 = a^{2(n-2)} \Delta_{n-1};$$

donc

$$L = B_n + (a_{n-1})^2 L_1.$$

Si dans L_1 nous représentons par B_{n-1} tous les termes

7.



de L_1 qui renferment a_{n-1}, on trouvera de même

$$L_1 = B_{n-1} + (a_{n-2})^2 L_2 \quad \text{ou} \quad L_2 = a^{2(n-3)} \Delta_{n-2},$$

et ainsi de suite. En poursuivant, on parvient à

$$L_{n-2} = B_2 + a_1^2 L_{n-1};$$

L_{n-2} se rapporte à l'équation

$$ax^2 + a_1 x + a_2 = 0.$$

On a évidemment

$$L_{n-2} = a_1^2 - 4aa_2, \quad \text{ou} \quad B_2 = -4aa_2;$$

donc

$$L_{n-1} = 1;$$

et, en remontant, on trouve que L renferme le terme $(a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1)^2$, multiplié par l'unité positive.

4. L'expression L restant la même, en changeant dans les deux séries

$$a_n, \quad a_{n-1}, \quad a_{n-2} \ldots a_1, \quad a$$

en

$$a, \quad a_1, \quad a_2 \ldots \quad a_{n-1}, \quad a_n,$$

on a donc aussi

$$L = A + a_1^2 L_1,$$

où A renferme tous les termes qui contiennent a,

$$L_1 = A_1 + a_2^2 L_2,$$

où A_1 est l'ensemble des termes affectés de a_1, et ainsi de suite.

4 *bis*. $L = 0$ est la condition pour que l'équation (1) ait au moins deux racines égales.

Applications géométriques.

5. A, B, C étant trois points en ligne droite, représentons leurs deux coordonnées respectives par $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$;

$\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, où Z, z, c représentent l'unité, et qu'on adopte en vue de l'homogénéité (*voir* tome VII, page 5).

Posons $AB = r$, $AC = \rho$, nous supposerons que le quotient $\frac{r}{\rho}$ est négatif, si A est entre B et C, et positif dans le cas contraire; on a

$$\frac{X-x}{X-a} = \frac{Y-y}{Y-b} = \frac{r}{\rho};$$

d'où l'on tire

$$X(\rho - r) = \rho x - ra, \quad Y(\rho - \rho) = \rho y - rb.$$

En joignant à ces équations l'identité $Z(\rho - r) = \rho z - rc$, l'équation de la droite passant par les points B et C est déterminée par ces trois équations : connaissant $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, et le rapport $\frac{r}{\rho}$, on aura les coordonnées $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$ du point quelconque A.

Soit

$$(3) \qquad \varphi(X, Y, Z) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique de degré n, rendue homogène au moyen de l'introduction de Z.

Pour trouver l'intersection de cette courbe et de la droite indiquée ci-dessus, il faut remplacer X, Y, Z par leurs valeurs, et, après avoir multiplié par $(\rho - r)^n$, on obtient

$$(4) \qquad \varphi[\rho x - ra, \quad \rho y - rb, \quad \rho z - rc] = 0.$$

Développant, par le théorème de Taylor, suivant les puissances de ρ et de r, on obtient

$$(5) \quad \rho^n p - \rho^{n-1} r \frac{p_1}{1} + \rho^{n-2} r^2 \frac{p_2}{1.2} - \ldots + (-1)^n r^n \frac{p_n}{1.2\ldots n} = 0.$$

Cette équation fournit les différentes valeurs de $\frac{r}{\rho}$ par lesquelles les n intersections de la droite et de la courbe sont déterminées. On a :

$$p = \varphi(x, y, z),$$
$$p_1 = a\frac{dp}{dx} + b\frac{dp}{dy} + c\frac{dp}{dz},$$
$$p_2 = a\frac{dp_1}{dx} + b\frac{dp_1}{dy} + c\frac{dp_1}{dz},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n = a\frac{dp_{n-1}}{dx} + b\frac{dp_{n-1}}{dy} + c\frac{dp_{n-1}}{dz}.$$

Les expressions p, p_1, p_2, ..., p_n sont des degrés n, $n-1$, $n-2$, ..., o, par rapport aux quantités x, y, z, et des degrés o, 1, 2, 3, ..., n, par rapport aux quantités a, b, c. L'équation $p = 0$ est la même que l'équation de la courbe. Si l'on tire du point C(a, b, c) toutes les tangentes possibles dont le nombre est $n(n-1)$, les points de contact sont sur la courbe du $n - 1^{ième}$ degré $p_1 = 0$. Si l'on tire du même point C des tangentes à celle-ci, les points de contact sont sur la courbe du $n - 2^{ième}$ degré $p_2 = 0$, et ainsi de suite. On a nommé ces différentes courbes *première*, *seconde*, etc., *polaire* de la courbe donnée, par rapport au point a, b, c.

Si l'on choisit les deux points B et C de manière que la droite BC devienne tangente, deux des racines de l'équation (5) seront égales. Désignons par L = o, comme ci-dessus, la condition à laquelle doit sátisfaire l'équation (5); il est clair qu'en posant constantes les coordonnées a, b, c, et variables les coordonnées x, y, z, la condition L = o donnera tous les points qui, avec le point a, b, c, déterminent les tangentes à la courbe, c'est-à-dire l'équation L = o représente l'ensemble des tangentes qui passent par le point (a, b, c).

C'est le théorème de M. Cayley (*voir* tome VIII, page 117), et qu'on trouve dans le tome XXXIV du Journal de M. Crelle, imprimé avant le tome XXXIII.

6. Soit

$$p_i = 0 \tag{6}$$

une courbe algébrique de degré i en x, y, z, et posons

$$a\frac{dp_i}{dx} + b\frac{dp_i}{dy} + c\frac{dp_i}{dz} = p_{i+1},$$

$$a\frac{dp_{i+1}}{dx} + b\frac{dp_{i+1}}{dy} + c\frac{dp_{i+1}}{dz} = p_{i+2};$$

p_{i+1} et p_{i+2} sont de degré $i-1$ et $i-2$. Soit une autre courbe algébrique donnée par l'équation

$$R = Up_i + V(p_{i+1})^2 = 0, \tag{7}$$

U et V étant des fonctions quelconques de x, y, z : celle-ci et la courbe $p_i = 0$ auront $i(i-1)$ tangentes communes passant par (a, b, c). En effet, pour qu'une tangente à la courbe (7) passe par a, b, c, les coordonnées du point de contact doivent satisfaire à la condition

$$a\frac{dR}{dx} + b\frac{dR}{dy} + c\frac{dR}{dz} = 0;$$

ou bien

$$Up_{i+1} + p_i\left(a\frac{dU}{dx} + b\frac{dU}{dy} + c\frac{dU}{dz}\right) + 2p_{i+1}p_{i+2}V + p_{i+1}^2\left(a\frac{dV}{dx} + b\frac{dV}{dy} + c\frac{dV}{dz}\right) = 0.$$

Mais les intersections de $p_i = 0$ et $p_{i+1} = 0$ satisfont à cette condition; ce sont donc $i(i-i)$ points de contact, tels, qu'en menant les tangentes à la courbe (7), les tangentes passent par (a, b, c); mais ces intersections sont sur la courbe même (7), et $p_{i+1} = 0$ indique que ces tangentes sont aussi tangentes à $p_i = 0$.

7. Soit $L = 0$ l'équation des tangentes issues du point (a, b, c) à la courbe du $n^{ième}$ degré, de sorte que L est de degré $n(n-1)$; on a vu plus haut (page 100) que L peut se mettre sous la forme $pU + p_1^2 L_1$ [*voir* l'équation (5)], et p_1 est de degré $n-1$: donc L_1 est de degré

$$n(n-1) - 2(n-1) = (n-1)(n-2);$$

de même, L_1 peut prendre la forme $p_1 U_1 + p_2^2 L_2$, où L_2 est de degré $(n-2)(n-3)$, et ainsi de suite. On a donc le théorème suivant :

Les $n(n-1)$ tangentes à une courbe $p = 0$ du $n^{ième}$ degré, qui passent par un point C, *ont leurs points de contact dans une courbe $p_1 = 0$ de degré $n-1$; elles coupent la courbe en $n^2(n-1) - 2(n-1)n = n(n-1)(n-2)$ nouveaux points qui sont sur une courbe $L_1 = 0$ de degré $(n-1)(n-2)$; les courbes L_1 et $p_1 = 0$ ont $(n-1)(n-2)$ tangentes communes qui passent par le point* C.

8. *Exemple*. $n = 3$.

$$\begin{aligned} p = f(x, y, z) &= a'x^3 + b'y^3 + c'z^3 + 3dx^2y + 3d'x^2z \\ &\quad + 3ey^2x + 3e'y^2z + 3fz^2x + 3f'z^2y + 6gxyz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 = 3f_1 &= 3a(a'x^2 + ey^2 + fz^2 + 2gyz + 2d'zx + 2dxy) \\ &\quad + 3b(dx^2 + b'y^2 + f'z^2 + 2e'yz + 2gzx + 2exy) \\ &\quad + 3c(d'x^2 + e'y^2 + c'z^2 + 2f'yz + 2fzx + 2gxy), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 = 6f_2 &= 6a^2(a'x + dy + d'z) + 6b^2(ex + b'y + e'z) \\ &\quad + 6c^2(fx + f'y + c'z) + 12bc(gx + e'y + f'z) \\ &\quad + 12ac(d'x + gy + fz) + 12ab(dx + ey + gx), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 = 6f_3 &= 6a'a^3 + 6b'b^3 + 6c'c^3 + 18da^2b + 18d'a^2c \\ &\quad + 18eb^2c + 18e'b^2a + 18fc^2a + 18f'c^2b + 36gabc. \end{aligned}$$

Les expressions f, f_1 et f_2 se transforment les unes dans les autres par un changement des lettres x, y, z et a, b, c; ce qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème général. Les équations $f = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ sont celles de la courbe

et de ses polaires. L'équation (5) devient

$$f - 3f_1 \frac{r}{\rho} + 3f_2 \frac{r^2}{\rho_2} - f_3 \frac{r^3}{\rho_3} = 0,$$

et $L = 0$ devient

(A) $$(ff_3 - f_1 f_2)^2 - 4(f_1^2 - ff_2)(f_2^2 - f_1 f_3^2) = 0.$$

Telle est l'équation des tangentes qui passent par le point fixe (a, b, c) : pour trouver les intersections de ces tangentes avec la courbe, il faut combiner cette expression avec $f = 0$; alors cette équation se réduit à

$$f_1^2(-3f_2^2 + 4f_1 f_3^2) = 0.$$

Le facteur $f_1^2 = 0$ indique que les lignes représentées par l'équation (A) sont tangentes à la courbe; les autres intersections sont situées sur la conique

(B) $$-3f_2^2 + 4f_1 f_3^2 = 0.$$

On voit que la conique B et la polaire $f_1 = 0$ ont un double contact, et que la corde du contact est la polaire $f_2 = 0$; mais en tirant les deux tangentes de (a, b, c) à la courbe $f_1 = 0$, on sait que la corde de contact est aussi $f_2 = 0$; d'où le théorème suivant:

En tirant d'un point C *six tangentes à une courbe du troisième degré, les points de contact sont situés sur une conique* P ; *les tangentes coupent la courbe en six points situés sur une conique* Q ; *les coniques* P *et* Q *ont un contact double, et les tangentes communes passent par le point* C.

La première partie du théorème est connue ; mais on n'avait pas encore l'équation B de la conique Q.

BIBLIOGRAPHIE (*).

Liber Jesod Olam, seu Fundamentum mundi, opus astronomicum celeberrimum auctore *R. Isaac Israeli*, Hispano, ex manuscripto denuo ediderunt, textum emendarunt, notas adjecerunt, nec non versionem epitomariam vernaculam curaverunt *B. Goldberg* et *L. Rosenkranz*, Poloni. Sectio prior; Berolini, 1848; sectio altera; Berolini, 1846. Typis Kornegii.

Dans le XIVe siècle, la science et la tolérance régnaient en Espagne avec le mahométisme. L'université talmudique de Tolède était très-florissante. Dans le reste de l'Europe, l'ignorance et l'intolérance régnaient avec le catholicisme. Le célèbre Rabbi *Ascher* quitta Rottembourg, en 1300, avec toute sa famille, et s'enfuit à Tolède, où il devint chef d'école. Parmi ses disciples, se trouva Isaac, jeune Espagnol de la noble famille dite *Israeli*. Il excellait dans les calculs astronomiques. Ascher engagea Isaac à composer un ouvrage pour expliquer théoriquement la formation du calendrier judaïque, calendrier d'une complication si extravagante, que le calcul du nombre de jours écoulés entre deux événements est une opération prolixe, exigeant un calculateur exercé; tandis que dans le calendrier grégorien un élève d'école primaire peut faire cette opération en quelques minutes (**). Obéissant à l'in-

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

(**) Ce calendrier grégorien serait un modèle de simplicité, si l'on avait rendu fixe la fête pascale. On ne l'a pas fait, par animosité contre le judaïsme; on ne voulait pas que les deux fêtes pussent coïncider : but antisocial qui n'est même pas complétement atteint.

vitation de son maître, Isaac écrivit en hébreu le *Jesod Olam*. Après avoir donné succinctement les principaux théorèmes de la géométrie et des deux trigonométries, il expose les révolutions des corps célestes, dans le système géocentrique. A part quelques excentricités, lorsqu'il s'agit de faire concorder avec la science certaines assertions bibliques ou talmudiques (on n'est pas impunément théologien), Isaac montre partout un esprit clair, exact, méthodique; ce qui explique la haute réputation de cet ouvrage qui a été cité récemment en France, dans une discussion historique, au sujet de la *variation* lunaire. Une première édition, publiée aussi à Berlin en 1778 par Baruch Sklow, est fort défectueuse. Celle que nous annonçons, faite avec grand soin, est d'une parfaite exécution. La seconde partie, renfermant la quatrième et la cinquième section, les plus intéressantes, a paru en 1846. On la doit à M. Cassel. Les trois premières sections ont paru en 1848. Le texte hébreu est précédé d'un résumé des chapitres, en allemand. Il est à regretter qu'on n'y ait pas joint une traduction complète, soit en latin, soit en français. L'ouvrage est terminé par cinquante-neuf Tables astronomiques et quatre planches relatives aux préliminaires géométriques et trigonométriques, matière des trois premières sections.

Parmi les nombreux souscripteurs à cet ouvrage, assez cher, on lit les noms de MM. de Humboldt, Jacobi, Dirichlet, Borchardt, Ideler, etc. Si l'on publiait un semblable ouvrage en France, nos savants les mieux rentés s'empresseraient les premiers à ne pas souscrire, et cela par un motif très-pieux : l'Évangile dit qu'on ne doit pas, qu'on ne peut pas servir à la fois deux maîtres, Dieu et Mammon (*). Or nous sommes devenus très-évangé-

(*) Mot araméen qui signifie de l'argent monnayé : *argentum signatum*.

liques, nous ne servons qu'un maître. Ce précieux ouvrage d'astronomie du moyen âge existe-t-il à la Bibliothèque astronomique de l'Observatoire national? Le doute est permis. Quant à la Bibliothèque nationale, le doute n'est pas permis; le livre n'y est pas. Cet établissement a la prétention follement impossible d'accumuler dans un local *fini* le nombre indéfiniment croissant des productions de l'esprit humain, et toutefois on ne rencontre, dans le personnel, ni géomètres, ni physiciens, ni naturalistes, ni médecins, etc., enfin aucun homme voué spécialement à une de ces sciences. Si l'on veut s'obstiner à ne pas établir séparément des bibliothèques spéciales; si l'on veut s'obstiner à conserver une bibliothèque universelle et à faire croître sans cesse ce monument fatalement voué au chaos et au désordre; en cet état de choses, on devrait charger officiellement les cinq académies d'indiquer chaque année les ouvrages étrangers à acquérir, par voie d'achat ou d'échange; mesure simple, qui, par conséquent, ne sera pas adoptée (*).

LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES POSITIVES

(voir t. I, p. 243);

PAR M. MOURGUES,

Professeur au lycée de Marseille.

1. La solution la plus expéditive et la plus immédiate est donnée par la formule $1 + \sqrt[m-n]{S}$, S étant le coefficient négatif majeur, et n le degré du premier terme négatif. Mais cette formule a l'inconvénient de donner en général une limite beaucoup trop élevée. Il s'agit de la rendre

(*) La démonstration des célèbres formules Pascales de Gauss n'est pas encore connue en France.

plus avantageuse par une modification qui consiste à remplacer S par un nombre bien plus petit, à la formation duquel concourent tous ou presque tous les coefficients de l'équation.

2. *Lemme.* Pour toute valeur de x supérieure au nombre positif a, on a la relation

$$\frac{Nx^n+Px^p+\ldots+Rx^r+Tx^t}{x^n+x^p+\ldots+x^r+x^t} \leqq \frac{Na^n+Pa^p+\ldots+Ra^r+Ta^t}{a^n+a^p+\ldots+a^r+a^t},$$

n, p, ... r, t étant des nombres entiers positifs décroissants, et N, P, ..., R, T, des nombres positifs tels, que chacun d'eux soit au moins égal à celui qui le précède.

Démonstration. On a d'abord

$$\frac{Nx^n+Px^p}{x^n+x^p} = \frac{N(x^n+x^p)+(P-N)x^p}{x^n+x^p} = N + \frac{P-N}{x^{n-p}+1}.$$

Or, pour x positif et croissant, cette dernière quantité est constante ou décroissante, puisque $P \geqq N$; donc, pour $x > a$,

$$\frac{Nx^n+Px^p}{x^n+x^p} \leqq \frac{Na^n+Pa^p}{a^n+a^p}.$$

Si maintenant nous supposons démontrée la relation

$$\frac{Nx^n+px^p+\ldots+Rx^r}{x^n+x^p+\ldots+x^r} \leqq \frac{Na^n+Pa^p+\ldots+Ra^r}{a^n+a^p+\ldots+a^r} \;(=A),$$

ou

$$Nx^n+Px^p+\ldots+Rx^r \leqq A(x^n+x^p+\ldots+x^r),$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{Nx^n+Px^p+\ldots+Rx^r+Tx^t}{x^n+x^p+\ldots+x^r+x^t} &\leqq \frac{A(x^n+x^p+\ldots+x^r)+Tx^t}{x^n+x^p+\ldots+x^r+x^t},\\ &\leqq \frac{A(x^n+x^p+\ldots+x^r+x^t)+(T-A)x^t}{x^n+x^p+\ldots+x^r+x^t},\\ &\leqq A+\frac{T-A}{x^{n-t}+x^{p-t}+\ldots+x^{r-t}+1}.\end{aligned}$$

Or A est au plus égal à R et, par suite, au plus égal à T, puisque sa valeur est l'égale ou une moyenne des fractions égales ou croissantes $\frac{\mathrm{N}a^n}{a^n}, \frac{\mathrm{P}a^p}{a^p}, \ldots, \frac{\mathrm{R}a^r}{a^r}$; donc, pour x croissant à partir de a, la dernière quantité sera constante ou décroissante. Par suite,

$$\frac{\mathrm{N}x^n + \mathrm{P}x^p + \ldots + \mathrm{R}x^r + \mathrm{T}x^t}{x^n + x^p + \ldots + x^r + x^t} \leqq \frac{\mathrm{N}a^n + \mathrm{P}a^p + \ldots + \mathrm{R}a^r + \mathrm{T}a^t}{a^n + a^p + \ldots + a^r + a^t},$$

comme on voulait le démontrer.

Si l'on pose

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{N}a^n + \mathrm{P}a^p + \ldots + \mathrm{R}a^r + \mathrm{T}a^t}{a^n + a^p + \ldots + a^r + a^t} = \frac{\mathrm{N}a^{n-t} + \mathrm{P}a^{p-t} + \ldots + \mathrm{R}a^{r-t} + \mathrm{T}}{a^{n-t} + a^{p-t} + \ldots + a^{r-t} + 1},$$

la relation pourra s'écrire

$$\mathrm{N}x^n + \mathrm{P}x^p + \ldots + \mathrm{R}x^r + \mathrm{T}x^t \leqq \mathrm{K}(x^n + x^p + \ldots + x^r + x^t).$$

3. Soit une équation où les signes des termes négatifs sont mis en évidence :

$$x^m + \mathrm{C}x^c + \mathrm{H}x^h - \mathrm{N}x^n \ldots - \mathrm{N}_p x^p \ldots - \mathrm{N}_r x^r \ldots - \mathrm{N}_t x^t \ldots = 0.$$

Si les nombres $\mathrm{N}, \mathrm{N}_p, \ldots, \mathrm{N}_r, \mathrm{N}_t$ ne sont pas tels, que chacun d'eux soit au moins égal à celui qui le précède, en les remplaçant par des nombres $\mathrm{N}, \mathrm{P}, \ldots, \mathrm{R}, \mathrm{T}$, remplissant cette condition, on augmentera la somme absolue des termes négatifs pour une valeur quelconque positive de x. Donc on aura une limite supérieure des racines positives de la proposée dans toute valeur de x, à partir de laquelle sera satisfaite la relation

$$x^m + \mathrm{C}x^c + \mathrm{H}x^h > \mathrm{N}x^n + \mathrm{P}x^p + \ldots + \mathrm{R}x^r + \mathrm{T}x^t.$$

Or cette relation sera satisfaite par toute valeur positive de x, supérieure à $\geqq 2$, qui satisfera aux suivantes :

$$x^m + Cx^c + Hx^h > K(x^n + x^p \ldots + x^r + x^t),$$

$$> K(x^n + x^{n-1} \ldots + x + 1),$$

$$> K\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

$$> K\frac{x^{n+1}}{x - 1},$$

$$x^{m-n-1} + Cx^{c-n-1} + H^{h-n-1} > \frac{K}{x-1},$$

$$(x^m - 1)^{m-n-1} + Ca^{c-n-1} + Ha^{h-n-1} > \frac{K}{x-1},$$

$$(x-1)^{m-n} + Ca^{c-n-1} + Ha^{h-n-1} > K,$$

$$x > 1 + \sqrt[m-n]{K - Ca^{c-n-1} - Ha^{h-n-1}}.$$

Une limite supérieure des racines positives est donc le nombre qu'on obtient en donnant à a une valeur quelconque, non inférieure à 2, dans la formule

$$L = 1 + \sqrt[m-n]{\frac{Na^{n-t} + Pa^{p-t} \ldots + Ra^{r-t} + T}{a^{n-t} + a^{p-t} \ldots + a^{r-t} + 1} - Ca^{c-n-1} - Ha^{h-n-1}};$$

N étant le premier coefficient négatif, et P, Q,..., R, T, les autres coefficients de même espèce, ou ces coefficients modifiés de telle sorte que $P \geqq N$, $Q \geqq P$, etc.

4. Dans les applications de cette formule, on commencera par faire a égal à 2 ou à 3. Si une pareille substitution donnait pour L une valeur assez élevée, on remplacerait a par l'un des nombres 4, 5,..., 8, 9, 10, qui se prêtent à un calcul rapide. La limite serait ainsi abaissée, car, en vertu du lemme lui-même, K diminue quand a augmente. Il reste constant dans le seul cas où N est le coefficient négatif moyen, car alors $N = P \ldots = R = T$, et, par suite, $K = N$.

Exemples : 1°.

$$x^5 + 10x^4 - 12x^3 - 48x^2 - 50x - 24 = 0,$$

$$L = 1 + \sqrt{\frac{12a^3 + 48a^2 + 50a + 50}{a^3 + a^2 + a + 1}} - 10.$$

Pour $a = 2$,

$$L = 1 + \sqrt{\frac{438}{15}} - 10 = 6.$$

Pour $a = 3$,

$$L = 1 + \sqrt{\frac{956}{40}} - 10 = 5.$$

2°.

$$x^7 + 6x^6 - 5x^5 - 23x^4 + 15x^3 + 36x^2 - 115x + 48 = 0,$$

$$L = 1 + \sqrt{\frac{5a^4 + 23a^3 + 115}{a^4 + a^3 + 1}} - 6.$$

Pour $a = 2$,

$$L = 1 + \sqrt{\frac{379}{25}} - 6 = 5.$$

Pour $a = 3$,

$$L = 1 + \sqrt{\frac{1141}{109}} - 6 = 4.$$

5. Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte des termes positifs compris entre les termes négatifs extrêmes; mais on peut les mettre à profit pour diminuer les coefficients des termes négatifs qui les suivent : de cette manière. tous ou presque tous les coefficients concourent à la formation de la limite. C'est ce qu'indiquent les exemples suivants :

1°.

$$x^9 - 5x^8 - 13a^7 - 12x^6 - 5x^5 - 20x^4 - 27x^3 - 15x^2 + 1 = 0.$$

En scindant $5x^5$ en deux parties, $2x^5 + 3x^5$, l'équation peut s'écrire

$$x^9 - 5x^8 - 13x^7 - 12x^6 - (20 - 2x)x^4 - (27 - 3x^2)x^3 - 15x^2 + 1 = 0.$$

Pour toute valeur de x supérieure au nombre positif α, la somme des termes négatifs sera inférieure à

$$5x^8 + 13x^7 + 12x^6 + (20 - 2\alpha)x^4 + (27 - 3\alpha^2)x^3 + 15x^2.$$

En donnant à α une valeur particulière, 2 ou 3, certains coefficients négatifs dans la proposée se trouveront diminués, et, par suite, la valeur de L, où il faudra donner à a une valeur non inférieure à 2 et à α. En faisant $\alpha = 2$, et $a = 2$, on trouve $L = 10$.

2°.

$$x^8 - x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 5x - 40 = 0;$$

elle peut s'écrire

$$x^8 - x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 3x^4 - (8 - 2x)x^2 - (40 - 5x) = 0.$$

Pour x supérieure à $\alpha \geqq 1$, x^5 détruit $-3x^4$,

$$8 - 2x < 8 - 2\alpha, \quad \text{et} \quad 40 - 5x < 40 - 5\alpha;$$

la somme des termes négatifs est donc inférieure à

$$x^7 + 2x^6 + (8 - 2\alpha)x^2 + 40 - 5\alpha.$$

En faisant $\alpha = 2$, puis $a = 2$ dans L, on aura $L = 3$.

6. *Scolie.* Il pourrait se faire que, pour une valeur de $a \geqq 2$, la quantité $K - Ca^{c-n-1} - Ha^{h-n-1}$ fût, dans certains cas, inférieure à -1 et même inférieure à zéro. Alors, la dernière inégalité

$$(x - 1)^{m-n} > K - Ca^{c-n-1} - Ha^{h-n-1}$$

serait bien vérifiée pour toute valeur de x supérieure à a; mais cette inégalité n'impliquant la première qu'à condition de considérer des valeurs de x supérieures à a, c'est

le nombre a lui-même qu'il faudrait prendre pour limite dans ces circonstances.

7. Nous terminerons ces considérations sûr une limite supérieure des racines positives, en posant une règle qui permet, dans plusieurs cas, de reconnaître, pour ainsi dire, à vue, que la limite supérieure des racines positives est l'un des petits nombres 2, 3, 4, dont on peut, en général, se contenter.

Soit une équation, où les signes sont mis en évidence,

$$x^m + Cx^c + Hx^h - Nx^n \ldots - Sx^s \ldots = 0,$$

S désignant le coefficient négatif majeur.

Une valeur de $x \geqq 2$ sera une limite supérieure si, pour toute valeur supérieure, on a

$$x^m + Cx^c + Hx^h > S(x^n + x^{n-1} \ldots + x + 1),$$

$$> S\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

$$> Sx^{n+1};$$

donc $a \geqq \alpha$ sera une limite si, pour des valeurs supérieures de x, on a

$$a^{m-n-1}x^{n+1} + Ca^{c-n-1}x^{n+1} + Ha^{h-n-1}x^{n+1} > S\alpha^{n+1},$$

$$a^{m-n-1} + Ca^{c-n-1} + H\alpha^{h-n-1} > S.$$

De là cet énoncé :

Le nombre a, non inférieur à 2, est une limite supérieure lorsque le coefficient négatif majeur ne dépasse pas la somme des premiers termes positifs, après remplacement de x par a et soustraction faite aux exposants de l'exposant plus un du premier terme négatif.

Exemple :

$$x^5 + 50x^4 - 42x^3 - 49x^2 - 52x - 39 = 0.$$

La règle donne

$$a + 50 > 52;$$

donc 2 est une limite supérieure.

Ici, comme précédemment, on pourra profiter des termes positifs compris entre les termes négatifs extrêmes pour la correction de termes négatifs suivants.

Exemple :

$$x^9 + 18x^8 - 13x^7 - 16x^6 + x^5 - 20x^4 - 27x^3 - 15x^2 + 8x - 41 = 0.$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$x^9 + 18x^8 - 13x^7 - 16x^6 - 20x^4 - (27 - x^2)x^3 - 15x^2 - (41 - 8x) = 0.$$

Or, pour toute valeur de x supérieure au nombre positif α, la somme des termes négatifs est inférieure à

$$13x^7 + 16x^6 + 20x^4 + (27 - \alpha^2)x^3 + 15x^2 + (41 - 8\alpha).$$

Pour $\alpha = 3$, le coefficient majeur est 20.

La règle donne alors

$$a + 18 > 20.$$

Mais les valeurs de x considérées étant supérieures, d'une part, à $\alpha = 3$, et, d'autre part, devant être supérieures à a, on ne peut pas donner à a une valeur inférieure à 3. Ce nombre 3 vérifiant l'inégalité, il est une limite supérieure des racines positives.

RECTIFICATION

(voir t. VIII, p. 58).

Le lecteur attentif aura remarqué facilement une inadvertance qui mène à une conclusion fausse. Le cercle osculateur en A ne peut passer par B. Nous verrons prochainement que l'équation du troisième degré a toujours trois racines réelles.

SOLUTION DE LA QUESTION 206

(voir t. VIII, p. 107);

PAR M. E. CLERE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Trouver des nombres rationnels qui satisfassent aux équations

$$x^2+y^2-1=z^2,$$
$$x^2-y^2-1=u^2.$$

Retranchons la seconde équation de la première, il viendra

$$2y^2=z^2-u^2.$$

Supposons y décomposé en deux facteurs p, q,

$$y=pq;$$

alors

$$(z+u)(z-u)=2p^2q^2.$$

Posons

$$z+u=2q^2,\quad z-u=p^2;$$

on en tire

$$z=\frac{2q^2+p^2}{2},$$
$$u=\frac{2q^2-p^2}{2}.$$

Actuellement, la condition que x doit aussi être rationnel va nous permettre de faire disparaître l'une des indéterminées p, q, de sorte que nous aurons x, y, z, u exprimés en fonction d'une seule indéterminée.

Pour cela, substituons les valeurs de y et de z dans

la première équation

$$x^2 + p^2 q^2 - 1 = \left(\frac{2q^2 + p^2}{2}\right)^2 = \frac{4q^4 + 4p^2q^2 + p^4}{4},$$

$$x^2 = \frac{4 + 4q^4 + p^4}{4}.$$

Pour que x soit rationnel, il faut que

$$4 + 4q^4 + p^4$$

soit un carré parfait, ou que

$$4q^4 = 4p^2,$$
$$p = q^2;$$

alors

$$x^2 = \frac{q^8 + 4q^4 + 4}{4} = \left(\frac{q^4 + 2}{2}\right)^2.$$

On a alors, pour valeur des quatre inconnues,

$$x = 1 + \frac{q^4}{2},$$
$$y = q^3,$$
$$z = q^2 + \frac{q^4}{2},$$
$$u = q^2 - \frac{q^4}{2}.$$

En donnant à q une valeur rationnelle quelconque, on aura des valeurs rationnelles de x, y, z, u. Et si l'on veut avoir des valeurs entières pour ces inconnues, il suffira de prendre pour q un nombre pair.

Il est d'ailleurs évident que l'on pourra prendre le signe que l'on voudra pour x, y, z, u.

Note. Le Lilavati dont cette question est tirée, donne les solutions suivantes :

$$x = 1 + \left(\frac{8q^2 - 1}{8q^2}\right)^2, \qquad y = \frac{8q^2 - 1}{2q}$$

pour des nombres rationnels, et

$$x = 8q^4 + 1, \qquad y = 8q^3$$

pour des nombres entiers. Cette dernière partie de la solution s'accorde seule avec la précédente, par la raison qu'en faisant $y = pq$, on suppose tacitement qu'il s'agit de nombres entiers; tandis qu'il faut rendre $2y^2 + u^2$ un carré parfait par les méthodes connues, sans la décomposition en facteurs; faire, par exemple,

$$2y^2 + u^2 = (u + ty)^2, \text{ etc.}$$

EXERCICES SUR UN SYSTÈME DE QUATRE POINTS EN LIGNE DROITE;

Par M. G.-J. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

Les quatre points en ligne droite sont désignés par les lettres respectives A, B, A′, B′, et les milieux des distances AA′, BB′, par α et β.

(1) $\quad AB + BA' + A'B' + B'A$ (*) $= 0.$

(2) $\quad AB.A'B' + AB'.BA' - AA'.BB' = 0.$

(3) $\quad \begin{cases} \overline{AB}^2 - \overline{A'B'}^2 = (AB' - BA')(AA' - BB'), \\ \overline{AB'}^2 - \overline{BA'}^2 = (AA' + BB')(AB + A'B'), \\ \overline{AA'}^2 - \overline{BB'}^2 = (AB - A'B')(AB' + BA'). \end{cases}$

(4) $\quad \begin{cases} \overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{BA'}^2 - 2\,AA'.BB', \\ \overline{AB'}^2 + \overline{BA'}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + 2\,AB.A'B', \\ \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 + 2\,AB'.BA'. \end{cases}$

(5) $\quad \overline{A\alpha}^2 - B\alpha.B'\alpha = \overline{B\beta}^2 - A\beta\,A'\beta.$

(*) Les distances positives sont prises dans le sens AB′, et les distances négatives dans le sens B′A, de sorte que $B'A = -AB'$.

$$(6)\quad \left.\begin{array}{l} AA'.BB'-2AB.A'B'= \\ 2AB'.A'B-\ \ AA'.BB'= \\ AB'.A'B-\ \ AB.A'B'= \end{array}\right\} 2\left(\overline{A\alpha}^2-B\alpha.B'\alpha\right)=2\left(\overline{B\beta}^2-A\beta.A'\beta\right).$$

$$(7)\quad \begin{cases} AB\,.\,AB'=AA'.A\beta-\left(\overline{B\beta}^2-A\beta\ A'\beta\right), \\ A'B.A'B'=AA'.A'\beta+\left(\overline{B\beta}^2-A\beta.A'\beta\right). \end{cases}$$

$$(8)\quad AB.AB'+A'B.A'B'=\overline{A\beta}^2-\overline{A'\beta}^2.$$

$$(9)\quad \left.\begin{array}{l} \overline{A'B}^2.A\beta-\overline{AB'}^2.A'\beta= \\ \overline{A'B'}^2.A\beta-\overline{AB}^2.A'\beta= \end{array}\right\} AA'\left(\overline{B\beta}^2-A\beta.A'\beta\right).$$

$$(10)\quad \left(\overline{AB'}^2-\overline{AB}^2\right)A'\beta=\left(\overline{A'B'}^2-\overline{A'B}^2\right)A\beta.$$

$$(11)\quad (AB'+AB)A'\beta=(A'B'-A'B)A\beta.$$

$$(12)\quad \begin{cases} AA'.AB.A'B=AB.\overline{A'B'}^2+A'B.\overline{AB'}^2-AA'.\overline{BB'}^2, \\ AA'.AB'.A'B'=A'B'.\overline{AB}^2-AB'.\overline{A'B}^2+AA'.\overline{BB'}^2. \end{cases}$$

$$(13)\quad PB.PB'.AA'=\overline{PA'}^2.A\beta-\overline{PA}^2.A'\beta-AA'\left(\overline{B\beta}^2-A\beta.A'\beta\right).$$

Dans cette dernière formule, P désigne un point quelconque de la droite ABA'B'.

SUR LA DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE FONCTIONS;

PAR M. T. A.,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

1. Dans les ouvrages élémentaires de calcul différentiel, on donne la manière d'obtenir les dérivées successives des fonctions de fonctions; mais on ne donne pas la loi de ces dérivées indépendamment les unes des autres. Ainsi, étant données les deux équations

$$z=F(y),\quad y=f(x),$$

on enseigne bien à trouver successivement

$$\frac{dz}{dx},\quad \frac{d^2z}{dx^2},\ldots,$$

mais on ne donne pas le moyen de calculer immédiatement $\frac{d^nz}{dx^n}$, sans passer par les dérivées $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2},\ldots,$ $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}$.

Cependant, dès que l'on sort des éléments, et qu'on veut appliquer le calcul différentiel aux développements de fonctions un peu compliquées, développer, par exemple, le polynôme $(a+bx+cx^2+\ldots+px^m)^n$ suivant les puissances de x, on sent bientôt la nécessité de connaître la loi que suivent les dérivées successives. Non pas qu'on ne soit parvenu jusqu'ici à ces développements, mais les moyens employés pour cela sont détournés, fondés souvent sur des démonstrations peu rigoureuses, comme celles d'Arbogast, et quelquefois même uniquement sur l'induction.

Cette lacune a d'autant plus lieu d'étonner, que la recherche de $\frac{d^nz}{dx^n}$ est assez facile, comme on va le voir.

Soient les deux équations

$$z=\mathrm{F}(y),\quad y=\varphi(x).$$

On aura

$$\frac{dz}{dx}=\mathrm{F}'(y).\varphi'(x),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\mathrm{F}'(y)\,\varphi''(x)+\mathrm{F}''(y)\,\varphi'(x)^2,$$

$$\frac{d^nz}{dx^n}=\mathrm{A}_1\mathrm{F}'(y)+\mathrm{A}_2\mathrm{F}''(y)+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{F}^{(n)}(y), \tag{1}$$

$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2,\ldots, \mathrm{A}_n$ étant des coefficients qui dépendent uniquement de $\varphi(x)$ et nullement de la fonction $\mathrm{F}(y)$,

comme il est facile de le prouver, en montrant que si cette loi est vraie pour la dérivée $(n)^{ième}$, elle est vraie aussi pour la dérivée $(n+1)^{ième}$.

D'après cela, pour déterminer les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$, il suffira de remplacer $F(y)$ par une fonction quelconque de y, e^{py} par exemple, et dans ce cas les coefficients $A_1, \ldots, A_n$ seront les coefficients qui multiplieront pe^{py}, $p^2e^{py}, \ldots,$ $p^n e^{py}$ dans l'expression de $\frac{d^n e^{py}}{dx^n}$. Reste donc à trouver $\frac{d^n e^{py}}{dx^n}$.

Pour cela, j'observe que si nous développons $e^{p\varphi(x+h)}$ suivant les puissances de h, $\dfrac{\frac{d^n e^{p\varphi(x)}}{dx^n}}{1.2.3\ldots n}$ sera le coefficient de h^n dans ce développement. Or

$$e^{p\varphi(x+h)} = e^{p\left[\varphi(x)+\varphi'(x)h+\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\right]}$$
$$= e^{p\varphi(x)} . e^{p\varphi'(x)h} . e^{p\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}} \ldots.$$

En développant $e^{p\varphi'(x)h}$, $e^{p\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}}, \ldots,$ et effectuant le produit, on aura pour le terme général

$$e^{p\varphi(x)} \sum p^{m_1+m_2+\ldots+m_n} \frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2.3\ldots m_1} \frac{\left[\frac{\varphi''(x)}{1\ 2}\right]^{m_2}}{1.2.3\ldots m_2}$$
$$\times \frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n}\right]^{m_n}}{1.2.3\ldots m_n} h^{m_1+2m_2+\ldots+nm_n};$$

par conséquent, si l'on pose

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \ldots + nm_n = n,$$

le coefficient de h^n sera

$$\frac{\frac{d^n e^{py}}{dx^n}}{1.2.3\ldots n} = e^{p\varphi(x)} \sum p^{m_1+m_2+\ldots+m_n} \frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1.2.3\ldots m_1} \times \frac{\left[\frac{\varphi''(x)}{}\right]^{m_2}}{1.2.3\ldots m_2} \cdots \frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1\ 2.3\ldots n}\right]^{m_n}}{1.2\ 3\ldots m_n}.$$

De plus, il est évident que pour avoir, dans cette équation, le coefficient de $p^m e^{py}$, ou A_m, il ne faudra prendre que les termes pour lesquels on aura

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m.$$

Donc, en définitive, on aura

$$A_m = 1.2.3\ldots n \sum \frac{\left[\frac{\varphi'(x)}{1}\right]^{m_1}}{1\ 2.3\ \ldots m_1} \times \frac{\left[\frac{\varphi''(x)}{1.2}\right]^{m_2}}{1.2.3\ldots m_2} \cdots \frac{\left[\frac{\varphi^{(n)}(x)}{1.2.3\ldots n}\right]^{m_n}}{1.2\ 3\ \ldots m_n},$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ étant des nombres entiers et positifs (y compris zéro) qui doivent satisfaire aux équations

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \ldots + nm_n = n,$$
$$m_1 + m_2 + m_3 \ldots\ldots + m_n = m.$$

Telle est la solution du problème. On peut la mettre sous une autre forme qui, quoique moins commode pour la pratique, est cependant plus concise.

En effet, en examinant la marche suivie plus haut, on verra qu'on a d'abord cherché dans le développement de $e^{p\left[\varphi'(x)h + \varphi''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\right]} = e^{p[\varphi(x+h) - \varphi(x)]}$ le terme en h^n; et, dans ce terme, on a pris seulement ce qui était multiplié par p^m. Or l'on peut, évidemment, faire l'inverse, chercher d'abord le terme en p^m dans

le développement de $e^{p[\varphi(x+h)-\varphi(x)]}$; ce terme est

$$\frac{[\varphi(x+h)-\varphi(x)]^m}{1.2.3\ldots m},$$

et puis ne prendre dans ce terme que ce qui est multiplié par h^n, ou, comme $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ est divisible par h, le coefficient de h^{n-m} dans la fonction $\dfrac{\left[\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]^m}{1.2.3..\ m}$.

Or ce coefficient est, d'après le théorème de Taylor, $\dfrac{\dfrac{d^{n-m}}{dh^{n-m}}\left[\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]^m_0}{1.2.3\ldots n-m}$ (le zéro placé en flanc marquant qu'on doit faire $h=0$ après les différentiations). On aura donc

$$A_m = \frac{1.2\,3\ldots n}{1.2.3\ldots(n-m)\,1.2.3\ldots m}\cdot\frac{d^{n-m}\left[\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]^m_0}{dh^{n-m}}$$

$$= \frac{n.n-1\ldots n-m+1}{1.2.3\ldots m}\cdot\frac{d^{n-m}\left[\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]^m_0}{dh^{n-m}}.$$

On peut encore trouver $\dfrac{d^n z}{dx^n}$ par d'autres considérations.

En nommant i l'accroissement de y correspondant à l'accroissement h de x, on aura

$$i=\varphi(x+h)-\varphi(x),$$

et

$$F(y+i) = F(y) + F'(y)\,i + \ldots + \frac{F^{(n)}(y)}{1.2.3\ldots n}\,i^n + \ldots$$

$$= F(y) + \frac{dF(y)}{dx}h + \ldots + \frac{d^nF(y)}{dx^n}\,\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

en supposant que dans $F(y)$ on ait remplacé y par $\varphi(x)$, et changé ensuite x en $x+h$.

Remplaçons i par sa valeur dans l'équation ci-dessus, en observant que $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ est divisible par h, et que par suite le terme en h^n dans i^m est

$$\frac{d^{n-m}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right]_0^m}{1.2.3\ldots n-m\; dh^{n-m}},$$

et identifiant les termes en h^n, on aura, en posant pour abréger,

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\theta,$$

$$\frac{\frac{d^nF(y)}{dx^n}}{1.2.3\ldots n}=\frac{F'(y)\frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}}}{1.2\;3\ldots n-1}+\frac{\frac{F''(y)}{1.2}\frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}}}{1.2.3\ldots n-2}+\ldots$$
$$+\frac{\frac{F^{(m)}(y)}{1.2.3\ldots m}\frac{d^{n-m}(\theta^m)_0}{dh^{n-m}}}{1.2.3\ldots n-m}+\ldots+\frac{F^{(n)}(y)(\theta^n)_0}{1.2.3\ldots},$$

ou bien

$$\frac{d^nz}{dx^n}=\frac{n}{1}F'(y)\frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}}$$
$$+\frac{n.n-1}{1.2}F''(y)\frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}F'''(y)\frac{d^{n-3}(\theta^3)_0}{dh^{n-3}}+\ldots$$

Supposons maintenant qu'on ait les trois équations

$$z=F(y),\quad y=\varphi(x),\quad x=f(u),$$

ou

$$z=\Phi(x)=\Pi(u).$$

En posant, comme précédemment,

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\theta,$$

on aura

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \Phi^{(n)}(x) = \frac{n}{1} F'(y) \frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}} + \frac{n.n-1}{1.2} F''(y) \frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}} + \ldots = U_n.$$

Si donc nous posons de nouveau $\frac{f(u+\varepsilon)-f(u)}{\varepsilon} = \omega$, nous aurons

$$\frac{d^n \Phi(x)}{du^n} = \frac{d^n z}{du^n} = \frac{n}{1} U_1 \frac{d^{n-1}(\omega)_0}{d\varepsilon^{n-1}} + \frac{n.n-1}{1.2} U_2 \frac{d^{n-2}(\omega^2)_0}{d\varepsilon^{n-2}} + \ldots.$$

Remplaçant $U_1, U_2, \ldots, U_n$ par leur valeur, on trouvera facilement la loi pour les fonctions de fonctions de fonctions, et ainsi de suite pour un nombre quelconque de fonctions.

ANNONCE (*).

Application de l'Algèbre a la Géométrie; par *E. Catalan*, professeur de mathématiques supérieures au lycée Charlemagne, etc.

Cet ouvrage, destiné aux candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale, est *lithographié* par Clouet. Il paraît deux ou trois feuilles par semaine.

On souscrit chez l'auteur, place de l'Estrapade, n° 1. Prix de la souscription : 10 francs.

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.



TÉTRAGONOMÉTRIE

D'APRÈS CARNOT.

(Géométrie de position, p. 387.)

(Voir tome IX, page 9.)

Soit le quadrilatère ABCD ; désignant par a, b, c, d, x, y les côtés successifs AB, BC, CD, DA et les diagonales AC, BD ; angle BAC $= \alpha$; angle CAD $= \beta$.

Les triangles BAC, CAD, BAD donnent

$$(1) \qquad b^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha,$$

$$(2) \qquad c^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cos B,$$

$$(3) \qquad y^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A;$$

et l'on a

$$(4) \qquad A = \alpha + \beta.$$

L'équation (4) donne

$$\cos A = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

d'où

$$(5) \quad 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2 A + 2\cos\alpha\cos\beta\cos A = 0.$$

Il ne reste plus qu'à substituer, dans cette équation (5), les valeurs de

$$\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos A;$$

or

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + x^2 - b^2}{2ax}, \quad \cos\beta = \frac{d^2 + x^2 - c^2}{2dx}, \quad \cos A = \frac{a^2 + d^2 - y^2}{2ad}.$$

L'équation (5) devient

$$4b^2c^2x^2 + (b^2 + c^2 - y^2)(c^2 + x^2 - d^2)(b^2 + x^2 - a^2)$$
$$= b^2(c^2 + x^2 - d^2)^2 + c^2(b^2 + x^2 - a^2)^2 + x^2(b^2 + c^2 - y^2)^2;$$

réduisant, on obtient

$$(a^2c^4 + a^4c^2 + b^4d^2 + b^2d^4 + x^2y^4 + x^4y^2)$$
$$+ (a^2b^2x^2 + a^2d^2y^2 + b^2c^2y^2 + c^2d^2x^2)$$
$$= a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + a^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2x^2y^2$$
$$+ b^2c^2d^2 + b^2d^2x^2 + b^2d^2y^2 + b^2x^2y^2 + c^2x^2y^2 + d^2x^2y^2.$$

La loi de formation est évidente.

Il est à observer que cette équation ne contient que les deuxièmes et quatrièmes puissances des lettres qui y entrent; de façon que si l'on donne cinq éléments d'un quadrilatère, le sixième sera donné par une équation bi-carrée, résoluble comme équation du deuxième degré.

Comment réduit-on l'équation du seizième degré (*voir* p. 10) à celle du quatrième?

Observation. La même méthode s'applique au quadrilatère sphérique. Il faut partir de l'équation

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A;$$

il serait utile d'en donner le développement.

Observation. La formule pour le quadrilatère rectiligne a été donnée par Euler, Lexell, Carnot. Biörnsen n'en parle pas dans sa Tétragonométrie; il ne considère que les cas où un angle est donné : ce qui donne lieu à quarante-deux problèmes, non compris les cas particuliers.

CALCUL INFINITÉSIMAL.

Sur les intégrales d'une équation différentielle du premier ordre a deux variables; par M. le professeur *Raabe*. (Extrait des *Mémoires de la Société des Investigateurs de la nature*, à Zurich, en allemand; 1848.)

C'est une Note que M. E. Catalan a insérée dans le

XIIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, qui est l'objet du présent Mémoire.

Soit

$$(1) \qquad F(x, y, a) = 0$$

une équation finie entre deux variables x, y et une constante a; différentiant cette équation et éliminant a, on obtient

$$(2) \qquad F'(x, y, y') = 0.$$

a ayant une valeur quelconque, l'équation (1) est une intégrale *particulière* de l'équation (2), et correspondante à cette valeur; mais si l'on élimine a entre l'équation (1) et l'une quelconque des deux équations

$$(3) \qquad \frac{dF(x, y, a)}{da} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{dF(x, y, a)}{da} = \frac{1}{0},$$

on obtient des équations qui sont aussi des intégrales de l'équation (2), désignées, d'après Lagrange, sous le nom d'*intégrales singulières*.

M. Catalan a fait voir que le résultat de l'élimination entre (1) et (4) ne donne pas toujours des intégrales ni *singulières* ni *particulières*.

Exemple. Soit

$$(1) \qquad F(x) = x + a - \sqrt{3 - (2y - a)} = 0.$$

L'équation (2) devient $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0$; l'équation (4) donne $2y = a$, ce qui réduit $F(x)$ à $x + 2y = 0$, équation qui ne satisfait pas à l'équation (2). M. Raabe ajoute que le résultat de l'élimination de la constante entre les équations (1) et (3) est sujet à la même restriction. En effet, soit

$$(3) \qquad F(x) = a(x - y) + \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{1 - x^2} = 0;$$

c'est l'intégrale complète de l'équation

$$(4) \qquad \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 :$$

faisant usage de l'équation (3), on parvient au résultat $x - y = 0$, équation qui ne satisfait pas à l'équation (2). Il s'agit de trouver la cause de ces restrictions.

Lorsque l'équation (1) a la forme explicite

$$(1) \qquad y = f(x, a),$$

l'élimination de a entre cette équation et l'équation

$$(5) \qquad \frac{dy}{da} = 0$$

donne toujours une solution singulière, sans aucune restriction. Lorsque la forme est implicite, on a

$$(6) \qquad \frac{dy}{da} = -\frac{\frac{d\mathrm{F}(x, y, a)}{da}}{\frac{d\mathrm{F}(x, y, a)}{dy}}.$$

Si l'on combine donc une seconde équation entre x, y, a, avec l'équation (1), et que l'on élimine a, si le résultat est tel que le second membre à droite de l'équation (6) s'anéantisse, alors on en tire la solution singulière; mais ce second membre ne devient nul qu'en posant le numérateur égal à zéro, pourvu que le dénominateur ne devienne pas zéro aussi : car alors $\frac{dy}{da} = \frac{0}{0}$, et il n'y a plus de solution singulière. De même, si les deux termes deviennent infinis simultanément, $\frac{dy}{da}$ est encore indéterminé. C'est ainsi que M. Raab explique les deux restrictions, et prend pour exemples les deux cas rapportés ci-dessus.

SUR LES POLYGONES INSCRITS DANS LE CERCLE;

Par M. E. PROUHET.

I. — *Nombre des conditions auxquelles doivent satisfaire les polygones inscrits.*

Le nombre des conditions nécessaires pour qu'un polygone de n côtés puisse être inscrit dans un cercle est $n-3$. On les obtiendra en exprimant que la circonférence qui passe par trois sommets passe par les $n-3$ autres.

Soient alors

$$A,\ B,\ C,\ldots,\ I,\ K,\ L$$

les sommets consécutifs du polygone, supposé convexe. Il suffira, pour trouver les conditions cherchées, d'exprimer que les circonférences circonscrites aux triangles

$$ABC,\ BCD,\ldots,\ IKL$$

ont le même rayon : car si O est le centre de la première, celui de la seconde ne pourra être que le point O, ou son symétrique par rapport à BC. Mais cette dernière supposition est incompatible avec la convexité du polygone.

II. — *Relations entre les diagonales et les angles.*

Désignons par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\ \lambda$$

les premières diagonales respectivement opposées aux angles

$$A,\ B,\ C,\ldots,\ L.$$

On sait que le rayon du cercle circonscrit à un triangle a pour valeur l'un des côtés divisé par deux fois le sinus

de l'angle opposé. Le rayon du polygone sera donc exprimé à la fois par

$$\frac{\alpha}{2\sin A}, \quad \frac{\beta}{2\sin B}, \quad \frac{\gamma}{2\sin C}, \dots, \quad \frac{\lambda}{2\sin L};$$

et, par suite, on aura

(1) $$\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B} = \frac{\gamma}{\sin C} = \dots = \frac{\lambda}{\sin L}.$$

Donc, *dans tout polygone inscrit, les sinus des angles sont proportionnels aux premières diagonales opposées à ces angles.*

III. — *Relations entre les angles et les côtés*

Désignons par

$$a, \; b, \; c, \dots, \; l$$

les côtés successifs du polygone, de telle sorte que a et b soient ceux qui comprennent l'angle A, et ainsi des autres. On aura

$$\alpha^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos A, \quad \beta^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos B, \dots,$$

et, par suite, les équations (1) reviennent aux suivantes :

2 $$\frac{a^2+b^2-2ab\cos A}{\sin^2 A} = \frac{b^2+c^2-2bc\cos B}{\sin^2 B} = \frac{c^2+d^2-2cd\cos C}{\sin^2 C} \dots$$

Ce second système, comme le précédent, renferme $n-1$ relations, tandis que $n-3$ seulement sont nécessaires, d'après ce que nous avons vu plus haut. Deux d'entre elles doivent donc être une conséquence des $n-3$ autres. C'est ce que l'on vérifierait, si la chose en valait la peine, en substituant dans les deux dernières équations du deuxième système, les valeurs de K, L, l, exprimées en fonction des $n-1$ autres côtés et des $n-3$ autres angles. On devrait arriver ainsi à deux identités.

IV. — *Relations entre le rayon et les côtés.*

Désignons par

$$2a', \; 2b', \; 2c', \ldots, \; 2l'$$

les arcs respectivement sous-tendus par les côtés

$$a, \; b, \; c, \ldots, \; l;$$

nous aurons

$$(3) \qquad a = 2R \sin a', \quad b = 2R \sin b', \ldots, \quad l = 2R \sin l',$$

et encore

$$(4) \qquad \sin(a' + b' + c' + \ldots + l') = 0.$$

L'élimination de a', b', c',..., l', entre les équations précédentes, conduira à une relation entre le rayon et les côtés. Le rayon étant connu, il sera aisé de trouver les angles. On a, en effet,

$$\cos A = \frac{a^2 + b^2 - \alpha^2}{2ab},$$

et

$$\alpha = 2R \sin(a' + b') = 2R\left(\frac{a}{2R}\sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} + \frac{b}{2R}\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}\right),$$

ou

$$\alpha = \frac{1}{2R}\left(a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}\right);$$

et il ne restera plus qu'à substituer cette valeur de α dans celle de $\cos A$.

Ainsi les seuls côtés d'un polygone inscriptible suffisent à le déterminer, pourvu que l'ordre dans lequel ces côtés se succèdent soit connu. Si cet ordre n'était pas donné, on pourrait, dans le même cercle et avec les mêmes côtés, inscrire un nombre de polygones égal à la moitié du nombre des permutations de n choses, c'est-à-dire

$3.4.5\ldots n$. Je dis la moitié, parce qu'il est visible que deux permutations inverses donneront deux polygones inversement superposables.

Au reste, *tous les polygones inscrits dans le même cercle et qui ont les mêmes côtés sont équivalents;* car les rayons menés aux sommets les décomposent en un même nombre de triangles égaux deux à deux, et dont l'ordre seul diffère.

V. — *Côté en fonction explicite des autres côtés et du rayon. — Polygones à côtés rationnels.*

L'équation (4) revient à la suivante :

$$(5) \qquad l = 2\mathrm{R}\sin(a' + b' + \ldots + k');$$

et si du second membre développé, d'après la formule connue, on fait disparaître les arcs a', b',..., à l'aide des relations (3), on aura ainsi la valeur de l exprimée en fonction explicite des autres côtés et du rayon.

Comme cette fonction ne renferme que des radicaux de la forme $\sqrt{4\mathrm{R}^2 - b^2}$, que l'on sait rendre rationnels, il en résulte qu'on pourra trouver des polygones inscrits dont les côtés et le rayon soient exprimés par des nombres rationnels et même entiers.

Pour donner un exemple de ce genre de recherches, fort en vogue au temps de Frénicle et de Fermat, supposons qu'il s'agisse d'un triangle dont les côtés soient a, b, c, et faisons d'abord $\mathrm{R} = 1$; nous aurons

$$c = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{4 - b^2} + b\sqrt{4 - a^2}\right).$$

Soient p et q des nombres entiers tellement choisis, que l'on puisse avoir

$$2p = \alpha^2 + \alpha'^2, \quad 2q = \beta^2 + \beta'^2.$$

Il suffira, pour résoudre le problème en nombres rationnels, de poser

$$a = \frac{\alpha^2 - \alpha'^2}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{2\alpha\alpha'}{p}, \quad b = \frac{\beta^2 - \beta'^2}{q} \quad \text{ou} \quad \frac{2\beta\beta'}{q},$$

et, si l'on veut des nombres entiers, de prendre

$$R = pq, \quad \text{ou} \quad 2pq.$$

On pourra facilement s'élever de là au cas général, et démontrer que dans les polygones ainsi obtenus, les diagonales et la surface sont également représentées par des nombres rationnels.

VI. — *De la possibilité de former un polygone inscriptible avec des droites données.*

Il est, sans doute, très-difficile, et le plus souvent tout à fait impossible d'exprimer le rayon d'un polygone en fonction explicite des côtés : car cette impossibilité existe déjà pour $n = 7, 9, 11$, etc., dans le cas très-simple où tous les côtés sont égaux. La complication des calculs empêchera même, en général, qu'on forme l'équation à coefficients rationnels d'où dépend ce rayon.

Cependant, *le problème qui consiste à former avec des droites, données de longueur, un polygone inscriptible convexe, admet une solution, et une seule, pourvu que le plus grand des côtés donnés soit moindre que la somme de tous les autres.*

Pour le démontrer, soient AB le plus grand des côtés donnés et O le centre d'une circonférence circonscrite à AB. A partir du point B, inscrivons dans l'arc BMA, les uns à la suite des autres, les $n - 1$ autres côtés, dont le dernier aboutisse en N, et appelons, pour abréger, ligne polygonale la ligne formée par ces côtés.

Quelque grande que soit la ligne polygonale, on peut

toujours concevoir le point O pris au-dessus de AB, et assez loin pour que la ligne polygonale soit inscrite tout entière dans l'arc BMA, et que, par conséquent, le point N soit au-dessus de AB.

Si, maintenant, les conditions précédemment établies continuant à subsister, on fait mouvoir le point O jusqu'à AB et au-dessous, il est visible que le point N approchera continuellement de la droite AB; je dis même qu'il finira par passer au-dessous. En effet, l'arc BMA va sans cesse en diminuant, et sa longueur, qui a pour limite la droite AB, finira par être inférieure à la ligne polygonale, puisque cette dernière est, par hypothèse, plus grande que AB. Dès lors cette ligne, ne pouvant être inscrite dans un arc plus petit qu'elle-même, aboutira nécessairement au-dessous de AB.

Or de la nature du mouvement de N il résulte que ce point ne peut venir au-dessous de AB sans passer par le point A. Il arrivera donc un moment où le point N sera en A, et, par conséquent, il existera un polygone inscrit convexe, et un seul ayant pour côtés les droites données.

C. Q. F. D.

Si l'on rapproche cette conclusion de ce que nous avons dit au § IV, on en tirera ce théorème :

Deux polygones inscrits et convexes, ayant les mêmes côtés, sont égaux ou équivalents, selon que ces côtés sont disposés dans le même ordre ou dans un ordre différent.

VII. — *Des polygones inscrits de $2n$ côtés.*

On sait que dans un quadrilatère inscrit les angles opposés sont supplémentaires. Cette propriété n'est qu'un cas particulier d'une autre plus générale et qui appartient à tous les polygones inscrits de $2n$ côtés.

Soit P un polygone de cette espèce. Par l'un des som-

mets A, que nous regarderons comme le premier, menons des diagonales à tous les sommets de rang pair. L'inspection de la figure et la propriété citée plus haut montrent que l'angle A est égal à la somme des suppléments des $n-1$ autres angles de rang impair. Donc la somme des angles de rang impair est égale à $2(n-1)$ angles droits. Comme la même chose peut se dire des angles de rang pair, on a donc ce théorème :

Dans tout polygone inscrit de $2n$ côtés, la somme des angles de rang pair est égale à la somme des angles de rang impair.

De là résulte que si, dans un pareil polygone, on connaît $2n-2$ angles, les deux autres seront déterminés par le théorème précédent et par le théorème connu sur la somme des angles d'un polygone convexe.

Donc si deux polygones inscrits de $2n$ côtés ont $2n-1$ côtés respectivement parallèles, ce qui suppose $2n-2$ angles égaux deux à deux, les angles restants seront égaux, et, par suite, les deux derniers côtés seront parallèles.

Ou, en d'autres termes :

Si un polygone de $2n$ côtés demeure constamment inscrit dans le même cercle, et que $2n-1$ de ses côtés se meuvent chacun parallèlement à lui-même, le dernier côté se mouvra *aussi parallèlement à lui-même.*

On s'élèvera facilement de là à un théorème plus général sur les polygones de $2n$ côtés, inscrits dans une conique et dont $2n-1$ pivotent autour de points fixes situés sur une même droite. (Poncelet.)

VIII. — *Des polygones inscrits de $2n+1$ côtés.*

Dans les polygones inscrits de $2n+1$ côtés, il ne peut exister entre les angles d'autre relation que celle qui fait dépendre leur somme de leur nombre. Car, s'il en était

autrement, la propriété précédente s'appliquerait aussi à ces polygones, et $2n$ côtés se mouvant parallèlement à eux-mêmes, il devrait en être de même du $(2n+1)^{ième}$. Mais, dans un pareil déplacement, si le premier côté se rapproche du centre, le deuxième s'en éloignera, le troisième s'en rapprochera, et ainsi de suite; de sorte que le $(2n+1)^{ième}$ devrait aussi se rapprocher du centre, ce qui est impossible puisque le $(2n+1)^{ième}$ est consécutif au premier.

Mais les polygones de $2n+1$ côtés jouissent d'une propriété qui leur est particulière.

Soient AB et AL le premier et le dernier côté d'un polygone inscrit qui en a $2n+1$. Faisons mouvoir parallèlement à eux-mêmes tous ces côtés, excepté le dernier. La diagonale BL, faisant partie d'un polygone de $2n$ côtés, devra, en vertu du théorème démontré plus haut, venir en B'L', parallèle à BL; mais déjà, par hypothèse, AB vient en A'B', parallèle à AB. Donc les angles ABL, A'B'L' sont égaux; donc AL = A'L'. Ainsi :

Lorsqu'un polygone de $2n+1$ côtés est constamment inscrit dans un cercle, si $2n$ côtés se meuvent parallèlement à eux-mêmes, le dernier côté conservera une grandeur constante.

Ce théorème peut aussi être généralisé. (Poncelet.)

IX. — *Conditions de similitude des polygones inscrits.*

Deux polygones de $2n+1$ côtés, équiangles entre eux, ne peuvent être inscrits dans le même cercle. S'il en était autrement, on pourrait, en faisant tourner l'un d'eux autour du centre, l'amener à avoir ses côtés respectivement parallèles à ceux du second, et nous venons de voir qu'il est impossible que deux polygones de cette espèce, inscrits dans le même cercle, aient tous leurs côtés respectivement parallèles.

Un polygone inscrit de $2n+1$ côtés est donc déterminé quand on connaît ses angles et le rayon, et ne dépend ainsi que d'un seul élément linéaire. Donc :

Deux polygones inscrits d'un nombre impair de côtés sont semblables quand ils ont les mêmes angles disposés dans le même ordre ou dans un ordre inverse.

Deux polygones de $2n$ côtés, inscrits dans le même cercle et équiangles entre eux, peuvent être amenés à coïncider quand deux côtés homologues sont égaux. Un polygone de cette espèce ne dépend donc que de deux éléments linéaires : un côté et le rayon. Donc :

Deux polygones inscrits d'un nombre pair de côtés et équiangles entre eux sont semblables quand le rapport de deux côtés homologues est égal au rapport des rayons.

X. — *Des polygones inscrits de $4n+2$ et de $4n$ côtés.*

THÉORÈME. *Dans un polygone inscrit de $4n+2$ côtés, si $2n$ côtés sont respectivement parallèles à leurs opposés, les deux côtés restants seront parallèles.*

Soient AL et A'L' les deux côtés dont le parallélisme n'est pas supposé. Les diagonales AL' et LA' forment, avec les côtés non représentés dans la figure, deux polygones inscrits de $2n+1$ côtés chacun, dont $2n$ côtés sont, par hypothèse, respectivement parallèles. Donc, en vertu d'un théorème déjà démontré (VIII), A'L = AL'; donc AL est parallèle à A'L'. C. Q. F. D.

THÉORÈME. *Dans un polygone inscrit de $4n$ côtés, si $2n-1$ de ces côtés sont respectivement parallèles à leurs opposés, les côtés restants seront égaux.*

La démonstration étant analogue à la précédente, nous ne nous y arrêterons pas.

Nous ferons remarquer ici que le premier théorème conduit facilement à un autre plus général, déjà donné

dans ce recueil (t. VI, p. 356), et qui comprend, comme cas particulier, l'hexagramme de Pascal.

XI. — *Des polygones inscrits de* $2^m.3$ *côtés.*

On sait que la surface d'un triangle a pour mesure le produit de ses côtés, quand on prend pour unité deux fois le diamètre du cercle circonscrit.

Considérons un hexagone inscrit dans un cercle. Joignons les sommets de rang impair. L'hexagone sera ainsi partagé en quatre triangles, et il est facile de voir, d'après la propriété citée, que le produit des trois triangles contigus au périmètre, divisé par la surface du triangle intérieur, est égal au produit des côtés de l'hexagone.

Si l'on avait joint les sommets de rang pair, on serait arrivé au même résultat.

On a donc le théorème suivant :

Si dans un hexagone inscrit on joint les sommets de rang impair, et les sommets de rang pair; que, dans le premier cas, on désigne par A, B, C *les surfaces des triangles contigus au périmètre, et par* D *la surface du triangle intérieur; que, dans le second cas, on désigne par les mêmes lettres accentuées les quantités analogues, on aura*

$$\frac{ABC}{D} = \frac{A'B'C'}{D'}.$$

On arrivera, par de semblables considérations, à cet autre théorème.

Dans un polygone inscrit de $2^m.3$ côtés, joignons les sommets de rang pair ou ceux de rang impairs.

Dans le polygone de $2^{m-1}.3$ côtés, ainsi obtenu, joignons encore les sommets de rang pair ou ceux de rang impair.

Continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à un triangle.

Soient P_1 le produit des triangles compris entre le premier et le second polygone; P_2 le produit des triangles compris entre le deuxième et le troisième,... P_m le dernier triangle, *le rapport*

$$\frac{P_1 P_3 P_5 \ldots}{P_2 P_4 P_6 \ldots}$$

sera constant, quelle que soit des 2^m *manières dont il est possible de décomposer ainsi le polygone, celle que l'on aura réalisée.*

Les deux propriétés précédentes, étant projectives, conviennent également aux polygones inscrits dans les coniques.

ARITHMÉTIQUE DE M. BERTRAND. RECTIFICATIONS (*).

(Extrait d'une Lettre anonyme.)

En parcourant les Exercices, très-bien choisis d'ailleurs, qui se trouvent énoncés dans l'*Arithmétique* de M. Bertrand, j'ai rencontré plusieurs inexactitudes, entre autres les deux suivantes :

1°. Erreur typographique. *De combien de manières peut-on décomposer un nombre en deux facteurs premiers entre eux? Prouver que ce nombre de manières est* $2^n - 1$, *n étant le nombre de facteurs premiers distincts qui divisent le nombre proposé.* (Exercice XII, page 84.)

Il faut lire 2^{n-1}. En effet, soit P_n le nombre de manières lorsqu'il y a *n* facteurs premiers distincts; avec un facteur

(*) Cet excellent ouvrage aura plusieurs éditions; il est utile d'en signaler d'avance les erreurs, la plupart purement *typographiques*. TM.



nouveau k, chacune des P_n manières, par exemple $abc\ldots \times def\ldots$, fournira deux facteurs distincts, savoir: $kab\ldots \times def\ldots$, et $ab\ldots \times kdef\ldots$; on aura donc $P_{n+1} = P_n$. Or, avec deux facteurs, il y a deux manières, $1 \times ab$ et $a \times b$; donc $P_n = 2^{n-1}$.

Observation. Le même raisonnement donne le nombre de manières de décomposer un nombre en trois facteurs premiers entre eux.

2°. Énoncé inexact. *Si une fraction irréductible a pour dénominateur un nombre premier, et que la période de la fraction décimale, à laquelle elle donne naissance, ait un nombre pair de chiffres, le premier et le dernier de ces chiffres, le deuxième et l'avant-dernier, et en général deux chiffres quelconques également distants des extrêmes, donnent une somme égale à* 9. (Exercice III, page 127.)

Il faut lire : Si l'on partage la période en deux moitiés qui aient le même nombre de chiffres, la somme des chiffres de même rang, dans chaque moitié, est toujours égale à 9. (Voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 397; 1846.)

SUR LES CONO-SPHÉRIQUES.

L'enseignement, en France, roule, depuis le 1er janvier jusqu'au 31 décembre, sur les coniques planes, qui ne sont toutefois que des cas particuliers des cono-sphériques; car le plan est un cas particulier de la sphère. Que, dans les colléges, on ne parle pas de ces courbes, c'est un mal; mais qu'on ne s'en occupe même pas dans les écoles destinées aux hautes théories, à l'École Normale, à l'École Polytechnique, voilà qui est tout à fait intolérable. Dans

les Universités d'Allemagne et d'Angleterre, ces courbes font partie des questions ordinaires d'examen, et avec raison. Sans parler des découvertes géométriques de M. Chasles, des applications analytiques de M. Serret, des beaux travaux de MM. Vannson et Borgnet (tome VII, pages 14, 51, 147, 174), les cono-sphériques se présentent en beaucoup de circonstances. Ainsi, rigoureusement parlant, les perspectives des trajectoires célestes, sur la voûte céleste, sont des cono-sphériques. Cependant les professeurs qui ne lisent pas les *Nouvelles Annales* ne connaissent pas ces *lignes,* même de *nom.* Nous croyons donc utile de consacrer dorénavant un article spécial aux questions de ce genre que nous devons à la générosité d'un célèbre professeur étranger.

Rappelons d'anciennes questions non résolues (tome VI, n° 153, page 242; tome VII, n° 190, page 240; n° 205, page 107).

1. Le cône ayant pour sommet le centre de l'une ou de l'autre des courbes nommées sphéro-lemniscates (tome VII, pages 136, 452) et pour base la courbe elle-même, est du second degré.

2. Discuter la courbe enveloppe des bases des triangles sphériques qui ont un angle commun et dont le produit des sinus des demi-angles à la base est constant; et trouver l'expression de son aire.

3. Étant donnée la base d'un triangle, formé sur la surface d'une sphère par trois arcs d'hyperboles équilatères sphériques (de première espèce) concentriques, déterminer le lieu du sommet lorsque la somme des angles du triangle est constante.

4. Étant donnée l'équation d'une courbe plane entre les coordonnées polaires, de la forme suivante :

$$r^4 - 2r^2 f(\omega) + k^4 = 0, \qquad (1)$$

prouver que si l'on désigne par s, s' les deux arcs qui répondent à la même valeur de l'angle polaire ω, on aura

$$s + s' = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2 + [f'(\omega)]^2 - 4k^4}{f(\omega) - k^2}}\, d\omega,$$

$$s - s' = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2 + [f'(\omega)]^2 - 4k^4}{f(\omega) + k^2}}\, d\omega,$$

où $f'(\omega)$ est la fonction dérivée de $f(\omega)$.

5. Semblablement, si l'on a l'équation d'une courbe sphérique entre les coordonnées polaires sphériques, savoir,

$$(2) \qquad \sin^2\rho\, f(\omega) + \sin 2\alpha \cos\rho = 1,$$

où α est une constante, on aura, en désignant par s, s' les deux arcs qui répondent à la même valeur de l'angle ω,

$$s + s' = \cos\alpha \int \sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2 + [f'(\omega)]^2 - 4f(\omega) + \sin^2 2\alpha}{f(\omega) - \cos^2\alpha}}\, \frac{d\omega}{f(\omega)},$$

$$s - s' = \sin\alpha \int \sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2 + [f'(\omega)]^2 - 4f(\omega) + \sin^2 2\alpha}{f(\omega) - \sin^2\alpha}}\, \frac{d\omega}{f(\omega)}.$$

Remarque. L'équation (2) peut être mise sous une forme entièrement analogue à celle de l'équation (1), si l'on prend $\tang \frac{1}{2}\rho$ pour la quantité analogue à un rayon vecteur. (Strebor.)

LIEU GÉOMÉTRIQUE DU POINT D'UNE DROITE DE LONGUEUR FIXE S'APPUYANT SUR DEUX DIRECTRICES;

Par M. WATELET,
Officier d'Académie, directeur de l'École supérieure de Soissons.

M. le professeur Vincent a traité savamment, dans ce recueil, le cas général où une droite s'appuie sur deux

circonférences (tome VII, page 64). Un cas particulier où un des cercles devient une droite semble mériter attention : l'équation de la courbe se réduit alors au quatrième degré, dont la recherche et la discussion ne présentent aucune difficulté. Lorsque la droite directrice est un diamètre, et que la droite de longueur fixe est égale au rayon de la circonférence, le point décrit une ellipse. Cette propriété est connue; mais il est utile d'y rappeler l'attention des élèves, et de les engager à en trouver une démonstration géométrique.

QUESTION D'EXAMEN N° 97

(voir t. IX, p. 40);

PAR M. AUGUSTE HERBÉ,
Élève au lycée de Reims (classe de M. Sornin).

THÉORÈME. $\frac{(x^m-1)(x^{m-1}-1)(x^{m-2}-1)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}$ *est toujours entier, m étant un nombre positif entier quelconque.*

Démonstration. Le dénominateur est égal à

$$(x-1)^3(x+1)(x^2-x+1),$$

et les facteurs $x-1$, $x+1$, x^2-x+1 sont premiers entre eux. Or le numérateur est évidemment divisible par $(x-1)^3$: un des trois nombres consécutifs m, $m-1$, $m-2$ est nécessairement pair; donc l'un des facteurs du numérateur est divisible par $x+1$: un des trois mêmes nombres consécutifs est divisible par 3; donc un des facteurs du numérateur est divisible par x^3-1.

C. Q. F. D.

Note. Comment prouve-t-on que l'expression

$$\frac{(x^m-1)(x^{m-1}-1)\ldots(x^{m-p}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^{p+1}-1)}$$

est entière pour une valeur entière positive de m?

QUESTION D'EXAMEN, PROBLÈME IV

(Arithmétique de M. Bertrand, p. 226);

PAR M. LÉON BENOIT,
Élève au lycée de Reims.

1. *Lemme.* a et b étant premiers entre eux et irrationnels quadratiques, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.

Démonstration. Si cette somme est rationnelle, le carré de cette somme est aussi rationnel; donc $\sqrt{ab}$ est rationnel, ce qui est impossible.

2. *Lemme.* a, b, c n'ayant pas de facteurs communs et étant irrationnels quadratiques, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ est irrationnel.

Démonstration. Si cette somme est rationnelle, le carré est aussi rationnel; donc $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}=r$, où r est une quantité rationnelle. Élevant au carré, on trouve $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}=s$, où s est encore une quantité rationnelle. Éliminant un des radicaux, on trouve la somme de deux radicaux égale à une quantité rationnelle, ce qui est contraire au lemme précédent; donc, etc.

3. THÉORÈME. *$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ ne peuvent faire partie d'une même progression, soit par différence, soit par quotient.*

Démonstration.—Par différence. r étant la raison, on a

$$\sqrt{5}=\sqrt{2}+nr,\quad \sqrt{7}=\sqrt{2}+n'r,\quad \frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{n'}{n},$$

où $\frac{n'}{n}$ est une quantité rationnelle. Multipliant la fraction à

gauche, haut et bas, par $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, il vient

$$\frac{\sqrt{35}-\sqrt{10}+\sqrt{14}-2}{3}=\frac{n'}{n}.$$

Il faut que $\sqrt{5}+\sqrt{14}-\sqrt{10}$ soit rationnel, ce qui est impossible (*lemme* 2); donc, etc.

Par quotient.

$$\sqrt{5}=q^{n}\sqrt{2},\quad \sqrt{7}=q^{n'}\sqrt{2};$$

d'où

$$q=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2n}}=\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{1}{2n'}},\quad \left(\frac{5}{2}\right)^{2n'}=\left(\frac{7}{2}\right)^{2n},\quad 5^{n'}.2^{n}=7^{n}.2^{n'};$$

n et n' étant des nombres entiers, cette équation est évidemment impossible; donc, etc.

SOLUTIONS DES DEUX QUESTIONS 221 ET 222

(voir t. IX, p. 11 et 12);

PAR MM. MARQFOY (GUSTAVE), élève en mathématiques supérieures (Sainte-Barbe); J. LEFEVRE (de Soissons), élève de M. Watelet; HERBÉ (AUGUSTE), élève de mathématiques supérieures, lycée de Reims; DEWULF, élève au lycée de Douai; ED. PLOIX, élève au lycée de Versailles.

THÉORÈME. *Si par le sommet* A *d'un parallélogramme* ADCB *on mène une sécante quelconque* Aaa_1 *coupant* CD *en* a *et* BC *en* a_1, *le rectangle* Da.Ba_1 *est constant.*

Démonstration. Les triangles semblables ADa, aa_1C donnent

$$Da : aC :: AD : a_1C,$$

ou

$$AB : Ba_1 :: Da : AD;$$

donc

$$Da.Ba_1 = AB.AD. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$



THÉORÈME. *Soient deux triangles rectangles* OAB, O′AB *qui ont une même hypoténuse* AB. *Si l'on joint les sommets des angles droits* O, O′ *à un point quelconque* I *de l'hypoténuse, on aura*

$$\tan AOI . \tan IO'B = \text{constante}.$$

Démonstration. J'abaisse les perpendiculaires IK, IH sur AO et BO′,

$$IK = OK . \tan AOI = \frac{IB \; AK}{AI} . \tan AOI,$$

$$IH = O'H . \tan IO'B = \frac{AI . BH}{IB} . \tan IO'B.$$

Donc

$$IK . IH = AK . BH \; \tan AOI \; \tan IO'B;$$

d'où

$$\tan AOI \; \tan IO'B = \frac{IK}{AK} . \frac{IH}{BH} = \tan OAB . \tan ABO'.$$

C. Q. F. D.

Note. M. l'abbé Julien, du séminaire de Vals, et M. Clère, ingénieur des Ponts et Chaussées, ont aussi adressé des solutions de ces deux problèmes : celle de M. l'abbé, pour le problème 222, est purement analytique. On prend pour origine le point A, AB pour axe des x et les coordonnées rectangulaires.

MÊME THÉORÈME SUR LA SPHÈRE;

PAR M. ED. PLOIX,
Élève au lycée de Versailles.

Prenons de même deux triangles sphériques rectangles AOB, AO′B qui ont même hypoténuse AB; I est un point



quelconque pris sur AB. Abaissons de ce point deux arcs perpendiculaires IC et IC′ sur OA et O′B. On aura, en comparant successivement les deux valeurs de tang IC dans les deux triangles ICO, ICA,

$$\sin OC \tan AOI = \sin AC \tan OAB,$$

et de même

$$\sin O'C' \tan IO'B = \sin C'B \tan O'BA\,;$$

d'où

$$(1) \qquad \sin OC . \sin O'C' \tan AOI \tan IO'B = \sin AC \sin C'B \tan OAB \tan O'BA.$$

Or prolongeons CI et OB jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en G; on aura, en considérant l'arc transversal CIG par rapport au triangle AOB, et remarquant que le point G est le pôle de l'arc OA,

$$(2) \qquad \sin AC . \sin IB = \sin OC . \sin AI . \cos OB,$$

et de même on aurait

$$(3) \qquad \sin C'B . \sin AI = \sin O'C' . \sin BI \cos AO'.$$

Multipliant les trois égalités (1), (2) et (3) membre à membre, il viendra

$$\tan IOA \tan IO'B = \cos OB \cos AO' \tan OAB \tan O'BA = \frac{\sin OB \sin AO'}{\sin AO \sin BO'}.$$

GÉOMÉTRIE SEGMENTAIRE.

En 1832, M. Jacob Steiner a publié, à Berlin, un ouvrage in-8°, sous ce titre :

Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geo-

metrischer gestalten von einander mit berücksichtigung der arbeiten alter und neuer geometer uber Porismen, projections-methoden, geometrie der Lage, transversalen, Dualitat und reciprocitat, von Jacob Steiner. *Erster theil mit vier Lithographirten tafeln*. C'est-à-dire :

Développement systématique de la dépendance des figures géométriques les unes des autres, ayant égard aux travaux des anciens et des nouveaux géomètres sur les porismes, les méthodes projectives, la géométrie de position, les transversales, la dualité et la réciprocité, etc. Première partie de 322 pages et 4 planches lithographiées.

Nous avons donné le titre *in extenso*, parce que c'est principalement de cet ouvrage que date la haute réputation de l'auteur, fondateur de la géométrie segmentaire en Allemagne, où il est devenu en quelque sorte l'Euclide de cette branche de la science de l'étendue. Les propositions sont si rigoureusement démontrées, si étroitement enchaînées, que la lecture de cet ouvrage rappelle la jouissance intellectuelle que procure l'étude des στοιχεια de l'ancienne géométrie. Dans cette première partie, l'auteur considère les propriétés de position et les propriétés métriques de divers *faisceaux* : 1° le faisceau *plan*, formé par des droites dans un même plan et issues d'un même point ; 2° faisceau *planaire*, formé par des plans passant par la même droite ; 3° faisceau *polyédral*, formé de droites dans l'espace et issues d'un même point. Les intersections de ces faisceaux entre eux étant des droites et des plans, donnent les diverses propositions des méthodes projectives. Il y a cinq propositions fondamentales, les deux propositions démontrées ci-dessus (p. 154, 155), et trois autres qu'on doit à M. Brianchon, savoir : 1° dans tous les faisceaux plans qui passent par les mêmes quatre points, les doubles rapports des *sinus* restent les mêmes ; 2° lorsque

le même faisceau de quatre droites coupe deux droites, les segments ont les mêmes doubles rapports; c'est ce que M. Chasles a appelé depuis *rapports anharmoniques;* 3° deux droites étant coupées par le même faisceau, si l'on déplace les droites et qu'on joigne les points correspondants, les droites de jonction et les droites données sont tangentes à une même conique (Mémoire sur les Lignes du second ordre, 1807).

L'ouvrage de M. Steiner est annoncé comme devant avoir cinq parties; les quatre dernières n'ont pas encore paru. Ce qui doit diminuer nos regrets, c'est que cette théorie segmentaire est aujourd'hui professée à la Sorbonne, et sera didactiquement développée dans le *Traité de Géométrie supérieure,* sous presse, et accompagnée des brillantes découvertes faites dans le domaine de l'*étendue,* par le célèbre auteur de ce Traité.

QUESTIONS.

223. n points a_1, a_2, a_3,..., a_n sont placés sur une droite; n autres points b_1, b_2, b_3,..., b_n sont placés sur une autre droite : dans quel cas pourra-t-on mettre les deux droites dans une telle position, que les lignes de jonction a_1b_1, a_2b_2,..., a_nb_n convergent vers le même point?

224. n droites a_1, a_2, a_3,..., a_n forment un faisceau plan; n autres droites b_1, b_2, b_3,..., b_n forment un second faisceau plan: dans quel cas pourra-t-on donner aux faisceaux une position telle, que les n intersections des rayons a_1, b_1; a_2, b_2;... ; a_n, b_n soient sur une même droite?

225. Mêmes données qu'en **224** : dans quel cas pourra-t-on donner aux faisceaux une position telle dans l'espace,

que les plans passant par les rayons a_1, b_1; a_2, b_2;...; a_n, b_n se coupent suivant la même droite? (STEINER.)

226. Soit une circonférence, A le centre, CAB un diamètre; sur CB, prolongé, prenez un point D tel, que l'on ait $DB.\overline{DC}^2 = AB.\overline{AD}^2$; du point D comme centre, et d'un rayon AB, décrivez une circonférence coupant en E la circonférence donnée: l'arc BE est la septième partie de la circonférence. (VIÈTE.)

227. Dans une conique à centre, on donne: 1° une directrice; 2° une tangente avec le point de contact; 3° la direction du diamètre qui passe par ce point: construire la conique. (UN ABONNÉ.)

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 215

(voir t. IX, p. 56);

PAR M. A. H., abonné.

Par tout point A d'une conique, passent quatre cercles osculateurs ayant leurs points de contact en A, B, C, D.

Le centre de la conique est le centre des moyennes distances de B, C, D. (JOACHIMSTAL.)

Le principe ne pouvant être vrai que pour les coniques à centre, nous prendrons pour la conique l'équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Soient donc (x_1, y_1) le point A pris sur la conique; (x, y) un des points de contact des cercles osculateurs qui passent par A. Nous avons d'abord :

$$(1) \qquad a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2,$$

$$(2) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

D'un autre côté, (X, Y) étant le centre du cercle osculateur en (x, y), on a

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 = (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2;$$

et comme

$$X = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \qquad Y = -\frac{c^2 y^3}{b^4},$$

il vient

$$(3) \quad \left(\frac{c^2 x^3}{a^4} - x\right)^2 + \left(\frac{c^2 y^3}{b^4} + y\right)^2 = \left(\frac{c^2 x^3}{a^4} - x_1\right)^2 + \left(\frac{c^2 y^3}{b^4} + y_1\right)^2.$$

Pour calculer les coordonnées des points de contact, il faudrait tirer x et y des équations (2) et (3), combinées avec l'équation (1).

Mais il est facile de voir qu'il nous suffira de prouver que l'équation finale en x, *débarrassée des racines étrangères à la question,* n'est que du troisième degré et manque de second terme.

Procédons à l'élimination de y et y_1 entre les équations (1) (2) et (3).

L'équation (3) donne

$$(3') \quad (y - y_1)\left(y + y_1 + \frac{2c^2 y^3}{b^4}\right) + (x - x_1)\left(x + x_1 - \frac{2c^2 x^3}{a^4}\right) = 0.$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$(4) \qquad (y - y_1)(y + y_1)a^2 + (x - x_1)(x + x_1)b^2 = 0.$$

Éliminant $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ entre les équations (3') et (4), on a

$$(5) \quad a^2(y + y_1)\left(x + x_1 - \frac{2c^2 x^3}{a^4}\right) - b^2(x + x_1)\left(y + y_1 + \frac{2c^2 y^3}{b^4}\right) = 0;$$

remplaçant $a^2 - b^2$ par c^2, et divisant par c^2, qui devient

facteur commun, on obtient

$$(5') \quad (y+y_1)(x+x_1) - \frac{2x^3}{a^2}(y+y_1) - \frac{2y^3}{b^2}(x+x_1) = 0.$$

Avant d'aller plus loin, nous remarquerons que : 1° $(x=x_1, y=y_1)$ est une solution du système des équations (1), (2) et (3) évidemment étrangère à la question, dans laquelle on ne considère que les points de contact autres que A; 2° si l'élimination de $\frac{y-y_1}{x-x_1}$, entre les équations (3') et (4), *paraît* avoir eu pour résultat de supprimer cette solution, elle en a introduit une autre (*) $(x=-x_1, y=-y_1)$ qui est aussi étrangère, de sorte que, après avoir éliminé y et y_1 entre les équations (1), (2) et (5), il faudra, dans l'équation finale, supprimer les racines $+x_1$, $-x_1$, chacune autant de fois qu'elle s'y trouvera.

Dans l'équation (5), remplaçons $\frac{y^2}{b^2}$ par sa valeur $1-\frac{x^2}{a^2}$ tirée de l'équation (1),

$$(6) \quad y[2x_1x^2 - a^2(x+x_1)] + y_1[2x^3 - a^2(x+x_1)] = 0.$$

Tirant de l'équation (6) le rapport $\frac{y^2}{y_1^2}$ et l'égalant à sa valeur $\frac{x^2-a^2}{x_1^2-a^2}$ tirée des équations (1) et (2), nous obtenons pour équation finale :

$$(7) \quad (a^2-x^2)[2x_1x^2 - a^2(x+x_1)]^2 - (a^2-x_1^2)[2x^3 - a^2(x+x_1)]^2 = 0.$$

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} x_1^2[a^4(x+x_1)^2 + 4x^6 - 4a^2x^3(x+x_1)] \\ -x^2[a^4(x+x_1)^2 + 4x_1^2x^4 - 4a^2x_1x^2(x+x_1)] \end{array} \right\} + 4a^2x^2(x^2-a^2)(x_1^2-x^2).$$

$$0 = (x_1^2-x^2)(x+x_1)^2a^4 - 4a^2x^3x_1(x_1^2-x^2) + 4a^2x^2(x^2-a^2)(x_1^2-x^2).$$

Nous voyons évidemment que $+x_1$ et $-x_1$ sont racines;

(*) $x=-x_1$, $y=-y_1$ vérifient l'équation (5) et rendent identiques les équations (1) et (2).

supprimons-les, nous aurons

(8) $$o = (x + x_1)^2 a^4 - 4a^2 x^3 x_1 + 4a^2 x^2 (x^2 - a^2);$$

supprimant encore la racine $+x_1$, on a

(9) $$4x^3 - 3a^2 x - a^2 x_1 = o.$$

Cette équation du troisième degré manque, en effet, de second terme.

Note. Les trois racines de cette équation sont réelles et comprises entre $+a$ et $-a$; de même les trois racines de l'équation

$$4y^3 - 3b^2 y - b^2 y_1 = o$$

sont réelles et comprises entre $+b$ et $-b$. Ainsi, dans l'ellipse, il existe toujours quatre cercles osculateurs passant par un même point de l'ellipse. Dans l'hyperbole, la dernière équation devient

$$4y^3 + 3b^2 y + b^2 y_1 = o,$$

qui n'a qu'une seule racine réelle, et il n'existe que deux cercles osculateurs. (*Voir* Rectification, page 115 de ce volume.)

PROGRAMME D'UN COURS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

TROISIÈME ARTICLE (voir page 89 de ce volume);

PAR M. C.-E. PAGE.

Inertie.

18. Nous avons déjà vu que les états de repos et de mouvement sont purement relatifs. Un corps est en repos quand il conserve la même position relativement à un système qui peut avoir lui-même un mouvement qu'on ignore et dont on fasse abstraction.

Lorsqu'un point quelconque d'un corps se meut suivant une certaine direction et avec une certaine vitesse, on peut toujours concevoir un système géométrique animé d'un mouvement de translation suivant la même direction et avec la même vitesse : le point est en repos relativement à ce système (*). On appelle *force* toute cause, quelle qu'elle soit, qui le fait sortir de cet état de repos, c'est-à-dire qui modifie, soit en grandeur, soit en direction, sa vitesse primitive.

C'est ce que l'on exprime en disant : 1° qu'un corps ne peut passer de l'état de repos à l'état de mouvement sans l'influence d'une cause quelconque appelée *force ;* 2° que lorsqu'un corps est en mouvement, il doit continuer à se mouvoir indéfiniment suivant la même direction et avec la même vitesse, à moins que son mouvement ne se trouve modifié par l'action d'une force.

Tel est l'énoncé de ce qu'on nomme le principe d'inertie, ce qui n'est, au fond, que la définition du mot force ; car cela revient à dire qu'on appelle force toute cause, quelle qu'elle soit, qui modifie, soit en grandeur, soit en direction, un mouvement déjà existant.

Des forces.

19. La nature même des forces nous étant inconnue, nous ne pouvons les apprécier que par les effets qu'elles produisent. Or, lorsqu'un point quelconque d'un corps reçoit un accroissement de vitesse suivant une certaine direction, nous regardons cet accroissement de vitesse comme l'effet d'une force appliquée à ce point et suivant cette direction. Nous avons donc une idée claire du point d'application et de la direction d'une force. Il nous reste à les comparer sous le rapport de l'intensité ; pour cela, il

(*) Ce mode de démonstration a été donné par Kant. TM.

faut commencer par définir ce que l'on entend par forces égales.

Deux forces sont égales, lorsque, étant appliquées à un même point et pendant le même temps, elles impriment à ce point le même accroissement de vitesse, chacune suivant sa direction, quelle que soit d'ailleurs la vitesse préexistante. Il résulte de là :

1°. Que deux forces égales et directement opposées appliquées à un même point se neutralisent; car elles lui impriment à chaque instant des vitesses égales et contraires qui se détruisent.

2°. Une force dont l'intensité reste constante imprime à son point d'application une vitesse proportionnelle au temps pendant lequel elle agit. En effet, deux forces égales agissant successivement sur le même point, dans le même sens et pendant le même temps, impriment des accroissements de vitesse égaux; donc, l'accroissement total, produit par les actions successives des deux forces, est double de l'accroissement produit par l'action d'une seule. Or, si la seconde commence à agir justement à l'instant où la première cesse, c'est exactement comme si la première continuait à agir pendant un temps double. On verrait de même que la vitesse produite au bout d'un temps triple serait triple, et ainsi de suite; d'où il est facile de conclure que la vitesse produite par une force constante est proportionnelle au temps pendant lequel cette force continue d'agir.

3°. Enfin, les forces sont entre elles dans le rapport des vitesses qu'elles impriment au même point dans des temps égaux. En effet, les accroissements de vitesse imprimés au même point par deux forces égales étant indépendants de l'état de repos et de mouvement, doivent rester les mêmes, quel que soit l'intervalle qui sépare les instants où elles commencent à agir; ils sont donc encore

les mêmes lorsque cet intervalle est nul, c'est-à-dire lorsque les deux forces agissent simultanément. Mais deux forces égales agissant simultanément sur le même point et dans le même sens forment une force double; donc une force double produit une vitesse double, une force triple produit une vitesse triple, etc. En général, les forces appliquées à un même point sont dans le rapport des vitesses qu'elles impriment à ce point dans des temps égaux.

Il s'ensuit que, pour comparer entre elles des forces appliquées à un même point, il suffit de comparer les vitesses qu'elles imprimeraient à ce point pendant le même temps, en une seconde par exemple; par suite, ces forces peuvent être représentées en grandeur et en direction au moyen des droites qui représentent en grandeur et en direction les vitesses qu'elles sont capables de produire en une seconde.

20. Jusqu'ici, nous avons supposé que l'intensité de la force restait constante pendant toute la durée de son action; mais l'on conçoit très-bien qu'il peut en être autrement, et que cette intensité peut varier d'une manière continue. On peut donc se proposer le problème suivant: Étant donnée la loi suivant laquelle l'intensité d'une force varie en fonction du temps, trouver la vitesse acquise par le point d'application au bout d'un temps donné.

Pour cela, sur une droite indéfinie, prenons des longueurs proportionnelles au temps, puis supposons qu'une perpendiculaire glisse le long de cette droite en variant de longueur suivant la même loi que l'intensité de la force; l'extrémité de cette perpendiculaire décrit une certaine courbe, et la surface limitée par cette courbe et par les deux ordonnées extrêmes correspondantes à deux instants donnés représente l'accroissement de vitesse que le point d'application a reçu pendant l'intervalle qui

sépare ces deux instants. [La démonstration est la même que celle que nous avons donnée pour le mouvement varié (5)].

Nous rencontrerons plus tard des questions où nous aurons à considérer des forces d'une intensité variable; mais, dans ce qui va suivre sur la composition des forces, nous supposerons que leur intensité reste constante pendant toute la durée de leur action: par conséquent, tant qu'elles agissent, la vitesse du point d'application croît proportionnellement au temps, le mouvement est uniformément varié, et les espaces croissent proportionnellement au carré du temps.

Dans tous les cas, que la force soit constante ou variable, la vitesse du point d'application cesse de varier à l'instant où la force cesse d'agir sur lui, et ce point, s'il n'est soumis à l'action d'aucune autre force, continue à se mouvoir d'un mouvement rectiligne et uniforme, en vertu de la vitesse acquise.

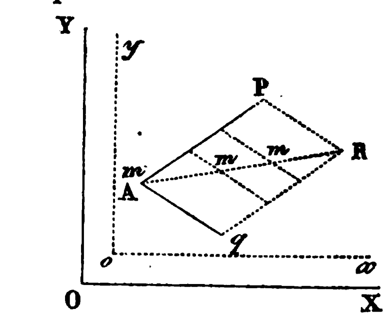
Composition des forces appliquées à un même point.

21. L'accroissement de vitesse qu'une force imprime suivant sa direction à son point d'application, est indépendant de l'état de repos ou de mouvement de ce point; par conséquent, si plusieurs forces sont appliquées simultanément au même point suivant des directions quelconques, leurs actions doivent être indépendantes l'une de l'autre, et chacune d'elles doit produire, suivant sa direction, le même accroissement de vitesse que si elle agissait seule; d'où l'on peut prévoir que les forces doivent se composer entre elles de la même manière que les vitesses. C'est ce que nous allons démontrer directement.

22. Un point mobile m (*fig.* 1) étant d'abord situé en un point A rapporté au système fixe OX, OY, supposons qu'on lui applique une force constante représentée en

grandeur et en direction par la droite A*p* ; le point mobile entraînant avec lui le point A, marche dans la direction de A*p* avec une vitesse croissant proportionnellement au temps, et parcourt des longueurs proportionnelles aux carrés des temps.

fig. 1.



Nous pouvons toujours concevoir un système mobile *ox*, *oy*, se mouvant d'un mouvement de translation avec une vitesse justement égale à celle du point A, de manière que ce point reste en repos relativement au système.

Maintenant, supposons qu'on applique au point mobile *m*, et en même temps que la première force, une seconde force représentée en grandeur et en direction par la droite A*q*; le point mobile quittant le point A marche dans la direction de A*q* avec une vitesse croissant proportionnellement au temps, et parcourt des longueurs proportionnelles aux carrés des temps: de sorte que, tandis que la droite A*q* marche parallèlement à elle-même en glissant le long de la droite A*p*, le point mobile glisse le long de la droite A*q*.

Les longueurs parcourues suivant ces deux directions étant toujours dans le rapport de A*p* à A*q*, le point mobile ne quitte pas la diagonale AR du parallélogramme construit sur ces lignes. Les vitesses acquises dans le sens de la diagonale sont aux vitesses acquises dans le sens des

côtés comme la diagonale est à ces mêmes côtés, et les chemins parcourus sont dans le même rapport; donc le mouvement du point mobile, par rapport au système fixe, est exactement le même que si ce point était sollicité par une force unique représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale AR.

Cette force unique, qui produit le même effet que deux forces données, se nomme leur *résultante*. Donc la résultante de deux forces appliquées en un même point est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent, en grandeur et en direction, les forces données.

Lorsqu'on sait trouver la résultante de deux forces, il est facile de trouver la résultante d'autant de forces qu'on voudra; ainsi, par exemple, on peut voir que la résultante de trois forces appliquées en un même point, et non situées dans le même plan, est représentée par la diagonale du parallélipipède construit sur les trois composantes.

Par la même raison qu'on peut composer trois forces en une seule, on peut décomposer une force en trois autres.

Si les trois composantes sont rectangulaires, chacune d'elles est la projection de la résultante sur sa direction.

Lorsqu'on veut composer en une seule plusieurs forces appliquées en un même point, on commence par projeter chacune de ces forces sur trois axes rectangulaires, on fait la somme des projections sur chacun de ces axes, on a ainsi trois composantes; en prenant la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois composantes, on a la résultante de toutes les forces données.

Si l'on applique une dernière force égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres, on établit une compensation exacte entre toutes les vitesses produites, et le point d'application reste en repos. On dit que des

forces sont en *équilibre,* quand elles neutralisent réciproquement leurs actions. Pour que plusieurs forces soient en équilibre, il faut et il suffit que chacune d'elles soit égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

Il est facile de voir que la projection de la diagonale d'un parallélogramme sur une direction quelconque est égale à la somme des projections des deux côtés adjacents; d'où l'on peut conclure que la projection de la résultante d'autant de forces qu'on voudra est égale à la somme des projections de toutes les composantes (bien entendu que les projections qui tombent en sens contraires doivent être prises avec des signes différents).

La résultante est donc toujours égale à la somme des projections de toutes les composantes sur sa propre direction. Par conséquent, si l'on représente par R la résultante des forces P, P', P'', etc., et par p, p', p'', etc., les projections de ces forces sur la direction de la résultante, on aura

$$R = p + p' + p'' + \ldots.$$

En appelant v la vitesse effective acquise à un instant quelconque par le point d'application dans le sens de la résultante, on aura

$$R.v = p.v + p'.v + p''.v + \ldots.$$

On appelle *travail élémentaire* d'une force, le produit de la vitesse du point d'application par la projection de la force sur la direction de cette vitesse. Ce produit est appelé *travail élémentaire moteur* quand la force tend à augmenter la vitesse, et *travail élémentaire résistant* dans le cas contraire. Lorsque le travail élémentaire moteur est pris comme *positif,* le travail élémentaire résistant doit être pris comme *négatif.*

On a donc ce théorème : *Le travail élémentaire de la*



résultante est égal à la somme des travaux élémentaires de toutes les composantes.

Dans le cas d'équilibre, la vitesse effective du point d'application, c'est-à-dire la vitesse résultant de l'action des forces, est nulle; mais en remplaçant la vitesse effective par une vitesse virtuelle, c'est-à-dire par une vitesse quelconque que le point est susceptible de prendre indépendamment de l'action des forces, le théorème a encore lieu.

En effet, dans le cas d'équilibre, la somme des projections des forces sur une direction quelconque est toujours nulle; en multipliant toutes ces projections par la vitesse que le point d'application est susceptible de prendre suivant cette direction, la somme des produits est encore nulle. Pour distinguer ce produit de celui où l'on fait usage de la vitesse effective, nous l'appellerons *travail élémentaire virtuel*. Nous aurons donc ce théorème :

Pour que des forces appliquées en un même point soient en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux élémentaires virtuels de toutes ces forces soit nulle.

Il faut remarquer que le produit de la vitesse du point d'application par la projection de la force sur la direction de cette vitesse est égal au produit de la force par la projection de la vitesse sur la direction de cette force; par conséquent, on peut prendre indifféremment l'un ou l'autre de ces produits pour le travail élémentaire de la force.

Transmission du travail élémentaire. Principe des vitesses virtuelles.

23. Lorsque des points sont liés entre eux, de manière qu'ils ne puissent se mouvoir indépendamment les uns des autres, toute force appliquée à l'un d'eux est né-

cessairement transmise aux autres. Cherchons de quelle manière cette transmission s'opère.

Dans la réalité, lorsqu'un corps est soumis à l'action d'une force, il commence par fléchir et se comprimer plus ou moins ; mais comme il arrive un instant où cette déformation cesse d'avoir lieu, nous pouvons en faire abstraction, et supposer que les différents points d'un corps sont liés entre eux par des droites d'une longueur invariable.

Ainsi, par exemple, les trois sommets d'un triangle, les quatre sommets d'un tétraèdre, sont fixement liés entre eux lorsque les longueurs des côtés et des arêtes sont invariables. Nous pouvons toujours concevoir les différents points d'un système réunis entre eux par un réseau de triangles et de tétraèdres.

Les droites invariables forment ce que l'on nomme les *liaisons géométriques du système*.

Quel que soit le mouvement qu'un pareil système soit susceptible de prendre, les projections sur une de ces droites des vitesses virtuelles de ses deux extrémités seront toujours égales et dirigées dans le même sens.

En effet, soit AB (*fig.* 2), page 164, l'une de ces droites de longueur invariable; soient Ap et Bq les lignes qui représentent en grandeur et en direction les vitesses virtuelles des points A et B : la vitesse Ap peut être décomposée en deux autres, l'une Am dirigée suivant AB, l'autre Ar perpendiculaire à AB. La vitesse Bq peut être décomposée de même en Bn et Bs. Or, puisque la distance AB doit rester invariable, il faut nécessairement que les deux vitesses composantes Am et Bn, dirigées suivant AB, soient égales et dirigées dans le même sens.

fig 2.

Si des forces appliquées en A et B (*fig.* 2) tendent à rapprocher ou à écarter ces points l'un de l'autre, leur action est détruite par la résistance de la droite AB. Cette résistance donne donc naissance à des *forces intérieures* dirigées suivant AB, et appliquées en sens contraires aux deux points A et B; de plus, ces forces intérieures sont égales entre elles.

En effet, on admet comme un axiome, que deux forces égales et directement opposées, appliquées aux extrémités A et B d'une droite invariable, se font équilibre; car il n'y aurait pas de raison pour que le mouvement commençât plutôt dans un sens que dans l'autre. Chacun des points A et B étant maintenu séparément en équilibre par la résistance de la droite AB, il faut bien admettre que les forces intérieures qui naissent de cette résistance sont égales entre elles.

Si les forces appliquées en A et B sont inégales, il y a un mouvement produit par l'excès de la plus grande sur la plus petite, et il reste deux forces égales à la plus petite qui se détruisent; ce sont ces deux forces égales qui tendent à produire le rapprochement ou l'écartement des deux points, et auxquelles les forces intérieures doivent faire équilibre.

Les projections sur la droite AB des vitesses virtuelles des points A et B étant égales et dirigées dans le même sens, les forces intérieures dues à la résistance de cette droite étant égales et dirigées en sens contraires, il est évident que les travaux élémentaires dus à ces forces

seront toujours égaux et de signes contraires: donc leur somme sera nulle.

Il en est de même pour toutes les forces intérieures dirigées suivant les droites qui forment les liaisons du système. Nous pouvons donc conclure que la somme des travaux élémentaires dus aux forces intérieures résultant des liaisons est toujours nulle.

Lorsque, par l'action des forces extérieures, le système est mis en mouvement, chaque point mobile est sollicité par une force immédiate telle, que si ce point était indépendant de tous les autres, il prendrait le même mouvement que celui qu'il prend réellement. Cette force immédiate qui produit le mouvement d'un point est évidemment la résultante de toutes les forces, tant extérieures qu'intérieures, qui le sollicitent. Le travail élémentaire de cette résultante est égal à la somme des travaux élémentaires de toutes ses composantes; par conséquent, la somme des travaux élémentaires de toutes les forces immédiates est égale à la somme des travaux élémentaires de toutes les forces, tant extérieures qu'intérieures, qui sollicitent tous les points mobiles; mais la somme des travaux élémentaires de toutes les forces intérieures est toujours nulle; nous avons donc ce théorème fondamental qui renferme, pour ainsi dire, toute la mécanique:

La somme des travaux élémentaires de toutes les résultantes immédiates auxquelles sont dus les mouvements des différents points d'un système, est égale à la somme des travaux élémentaires des forces extérieures appliquées à ce système.

Nous entendons par forces *immédiates* les forces qui, étant appliquées aux différents points d'un système supposés indépendants les uns des autres, leur imprimeraient les mêmes vitesses qu'ils prennent en vertu des liaisons qui existent entre eux.

Nous aurons souvent à revenir sur ce théorème dont les autres principaux théorèmes de mécanique ne sont, en quelque sorte, que les corollaires. Nous commencerons par en déduire le principe général de l'équilibre.

Le travail élémentaire de la force immédiate qui produit le mouvement d'un point est toujours positif; car la vitesse effective étant due à l'action de cette seule force, est évidemment dirigée dans le même sens qu'elle. Par conséquent, la somme des travaux élémentaires de toutes les forces immédiates est égale à l'excès de la somme des travaux élémentaires moteurs sur la somme des travaux élémentaires résistants de toutes les forces extérieures. Si ces deux sommes sont égales, toutes les forces immédiates sont nulles, il n'y a aucun mouvement produit, et les forces extérieures sont en équilibre.

Mais alors les vitesses effectives des points d'application des forces extérieures étant nulles, il faut remplacer les vitesses effectives par les vitesses virtuelles; on a donc ce théorème :

Pour que des forces dirigées et appliquées d'une manière quelconque soient en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux élémentaires virtuels de ces forces soit nulle.

Ce théorème est connu sous le nom de *principe des vitesses virtuelles*.

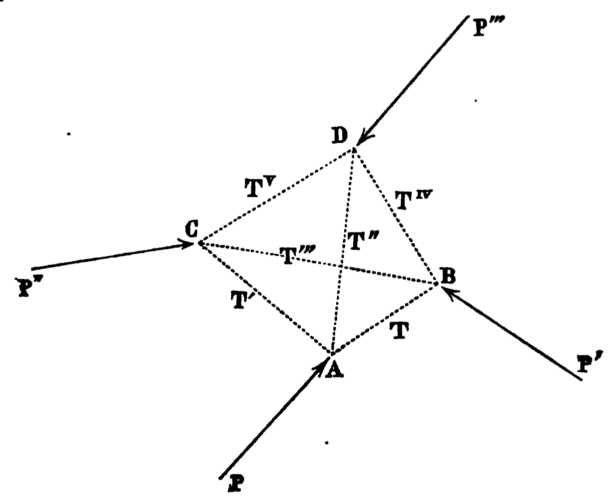
Si les forces extérieures ne sont pas en équilibre, il est clair qu'on établira l'équilibre en appliquant à chaque point mobile une force égale et directement opposée à la résultante immédiate qui le sollicite. On ramène ainsi toutes les questions de mécanique à des questions d'équilibre. C'est pour cette raison qu'on commence l'étude de la mécanique par la *statique*, qui est la science de l'équilibre. On appelle *dynamique* la partie de la mécanique qui traite de la production des mouvements par l'action des forces.

Statique.

24. Avant de faire des applications du principe des vitesses virtuelles, nous insisterons de nouveau sur sa démonstration à cause de son importance.

Soient A, B, C, D (*fig.* 3) les quatre sommets d'un tétraèdre dont les arêtes ont des longueurs invariables.

fig. 3.



Soient P, P′, P″, P‴ des forces appliquées à ces points. Représentons par p la projection de la vitesse virtuelle du point A sur la direction de la force P, et de même par p', p'', p''' les projections des vitesses virtuelles des points B, C, D sur les directions des forces P, P″, P‴. Pour qu'il y ait équilibre, il faudra qu'on ait

$$P.p + P'.p' + P''.p'' + P'''.p''' = 0.$$

En effet, représentons par T les forces intérieures provenant de la résistance de l'arête AB et appliquées en sens contraires aux deux extrémités A et B.

Soit t la projection de la vitesse virtuelle du point A

sur la direction de AB, la projection sur la même direction de la vitesse virtuelle du point R sera aussi égale à t; mais le travail élémentaire virtuel de la force T au point A étant égal à $+T.t$, le travail élémentaire virtuel au point B sera $-T.t$.

En représentant de même par T', T'', T''', T^{iv}, T^{v} les forces intérieures dues aux résistances des arêtes AC, AD, BC, BD, CD, et par t', t'', t''', t^{iv}, t^{v} les projections sur ces arêtes des vitesses virtuelles de leurs extrémités, on aura pour les travaux élémentaires virtuels développés aux deux extrémités

de l'arête AB,	$+T.t$	et	$-T.t$;
de l'arête AC,	$+T'.t'$	et	$-T'.t'$;
de l'arête AD,	$+T''.t''$	et	$-T''.t''$;
de l'arête BC,	$+T'''.t'''$	et	$-T'''.t'''$;
de l'arête BD,	$+T^{iv}.t^{iv}$	et	$-T^{iv}.t^{iv}$;
de l'arête CD,	$+T^{v}.t^{v}$	et	$-T^{v}.t^{v}$.

Pour que le système soit en équilibre, il faut que chaque point séparément soit en équilibre. Nous aurons pour l'équilibre des forces

Autour du point A, $P.p + T.t + T'.t' + T''.t'' = 0$;
Autour du point B, $P'.p' - T.t + T'''.t''' + T^{iv}.t^{iv} = 0$;
Autour du point C, $P''.p'' - T.t' - T'''.t''' + T^{v}.t^{v} = 0$;
Autour du point D, $P'''.p''' - T^{iv}.t^{iv} - T''.t'' - T^{v}.t^{v} = 0$.

En faisant la somme, on voit que tous les termes qui représentent les travaux élémentaires virtuels des forces intérieures dues aux résistances se détruisent, et il reste

$$P.p + P'.p' + P''.p'' + P'''\ p''' = 0.$$

Cette démonstration s'étend à autant de points et autant de forces qu'on voudra.

Elle s'applique aussi bien à un système gêné dans ses mouvements qu'à un système entièrement libre, puisque l'on entend par vitesses virtuelles, les vitesses que les diffé-

rents points sont succeptibles de prendre en vertu des mouvements possibles. Ainsi, par exemple, supposons qu'il y ait un point fixe O. La droite OA, menée du point fixe au point mobile A, n'a que la liberté de tourner autour du point fixe; par conséquent, la vitesse virtuelle du point A est toujours perpendiculaire à la droite OA, et sa projection sur cette droite est nulle : donc le produit d'une force intérieure dirigée suivant OA par la projection de la vitesse virtuelle du point A sur la direction de cette force est nul de lui-même.

Pour faire usage du principe des vitesses virtuelles, il faut supposer un des mouvements possibles du système auquel les forces sont appliquées, puis égaler à zéro la somme des travaux élémentaires virtuels correspondants; on obtient ainsi la condition à laquelle les forces doivent satisfaire pour neutraliser réciproquement leurs actions par rapport à ce mouvement possible. Il suit de là qu'on doit toujours avoir autant de conditions d'équilibre que le système peut prendre de mouvements différents; chacune de ces conditions indiquant que les forces se neutralisent réciproquement par rapport à l'un de ces mouvements possibles. (*La suite prochainement.*)

THÉORÈME DE M. JOACHIMSTHAL SUR L'INTERSECTION DE DEUX CONIQUES.

(Journal de M. Crelle, tome XXXVI, page 196; 1848.)

I. *Lemme.* Toutes les racines d'une équation algébrique peuvent être représentées par des tangentes d'arcs réels ou imaginaires; une fonction symétrique de ces arcs est une quantité réelle.

II. *Lemme.* Soit

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

une équation algébrique de degré m; si l'on a

$$A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \ldots = 0,$$

la somme des arcs-racines est un multiple de π; et si l'on a

$$A_0 - A_2 + A_4 - A_6 + \ldots = 0,$$

la somme des arcs-racines est un multiple de $\frac{\pi}{2}$.

La démonstration est fondée sur la formule connue qui exprime la tangente de la somme des m arcs, et sur les relations newtonniennes entre les coefficients d'une équation et les racines.

III. *Lemme.* Deux coniques situées dans un même plan ont un système d'axes conjugués en commun.

IV. Soient, dans un même plan, deux coniques à centre; prenons pour axes coordonnées le système commun d'axes *conjugués,* et pour origine le centre de l'une de ces coniques: les équations de ces courbes seront de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0, \\ A y^2 + C x^2 + D y + E x + F = 0. \end{cases}$$

Faisons dans la première équation $x = a \cos\alpha$, nous aurons $y = b \sin\alpha$; dans les points communs aux deux coniques, ces valeurs doivent aussi satisfaire à la seconde équation. Faisant la substitution, on obtient

$$A b^2 \sin^2\alpha + C a^2 \cos^2\alpha + D b \sin\alpha + E a \cos\alpha + F = 0.$$

Un calcul facile donne

$$(2)\qquad \begin{cases} \quad \operatorname{tang}^4\alpha\left[(A b^2 + F)^2 - D^2 b^2\right] - 2\, ab\, DE \operatorname{tang}^3\alpha \\ + \operatorname{tang}^2\alpha\left[2(A b^2 + F)(C a^2 + F) - b^2 D^2 - a^2 E^2\right] \\ - 2\, DE\, ab \operatorname{tang}\alpha + (C a^2 + F)^2 - E^2 a^2 = 0. \end{cases}$$



Comparant avec le lemme II, nous avons

$$A_1 - A_3 = 0;$$

donc la somme des arcs-racines est un multiple de π. On peut faire de ce résultat le sujet d'un théorème qui devient celui que M. Joachimsthal a énoncé sans démonstration, en supposant que la seconde conique est un cercle, et alors la première conique est une ellipse rapportée à ses axes principaux.

V. Si dans l'équation (2) nous avons

$$A_0 - A_2 + A_4 = 0 \quad \text{(lemme II)},$$

ou bien, toute réduction faite,

$$Ab^2 - Ca^2 = 0;$$

alors la somme des arcs-racines aux points d'intersection est un multiple de $\frac{\pi}{2}$.

VI. Lorsque la première conique est une hyperbole, son équation étant de la forme

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0,$$

on fera

$$x = a \text{ séc } \alpha, \quad \text{et} \quad y = b \text{ tang } \alpha.$$

On trouve que lorsqu'on a la relation

$$Ab^2 + Ca^2 + F = 0,$$

la somme des arcs-racines aux points d'intersection est un multiple de π, et un multiple de $\frac{\pi}{2}$ pour la relation

$$Ab^2 + Ca^2 - F - Db = 0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 194

(voir t. VII, p. 368) ;

PAR MM. BENOIT (LÉON) ET HERBÉ (AUGUSTE),
Élèves de mathématiques supérieures au lycée de Reims
(classe de M. Sornin).

1. On distingue trois sortes de polygones plans : 1° les polygones convexes ; 2° les polygones à angles rentrants ; 3° les polygones étoilés.

2. PROBLÈME. *Dans un quadrilatère plan, ayant deux angles opposés droits, étant donnés deux côtés consécutifs et l'angle compris entre ces côtés, trouver l'aire du quadrilatère en fonction des données.*

Solution. Un tel quadrilatère est nécessairement convexe.

1er *cas. Quadrilatère non étoilé.* Soient O, A, O′, A′ les sommets du quadrilatère ; A, A′ deux angles opposés droits ; $OA = a$, $OA' = a'$; angle $AOA' = \alpha$: on obtient facilement

$$A'O' \sin\alpha = a - a' \cos\alpha, \quad AO' = a' - a\cos\alpha.$$

Désignant par S l'aire du quadrilatère, on a

$$2S = aa' \sin\alpha + \frac{(a - a'\cos\alpha)(a' - a\cos\alpha)}{\sin\alpha},$$

$$2S\sin\alpha = 2aa' - (a^2 + a'^2)\cos\alpha = 4aa'\cos^2\frac{1}{2}\alpha - (a + a')^2\cos\alpha.$$

Autrement. Prolongeons AO′ et OA′ jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en I, on a

$$2S = 2(AIO - O'IA'),$$

ou

$$2\,\mathrm{AOI} = \overline{\mathrm{AO}}^2 . \mathrm{tang}\,\alpha = \frac{a^2 \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha}, \quad 2\,\mathrm{O'IA'} = \frac{(a - a'\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha};$$

d'où

$$2\,\mathrm{S}\sin\alpha = 2aa' - (a^2 + a'^2)\cos\alpha,$$

comme ci-dessus.

2e *cas*. *Quadrilatère étoilé*. Le point d'intersection I est sur les côtés AO', A'O *non prolongés*, alors l'expression $\frac{2aa' - (a^2 + a'^2)\cos\alpha}{2\sin\alpha}$ est toujours la différence des aires des triangles AIO et O'IA'; et c'est seulement de cette différence dont on a besoin dans la question 194 qui suit.

3. Problème. *Connaissant en grandeur et en direction les perpendiculaires abaissées d'un point* O *sur les côtés d'un polygone plan, trouver l'aire du polygone en fonction des données*.

Solution. Soit n le nombre des côtés du polygone et aussi le nombre des perpendiculaires abaissées du point O sur ces côtés : on formera ainsi n quadrilatères ayant chacun deux angles opposés droits. Désignons les côtés successifs par les nombres 1, 2, 3,..., n; et de même les perpendiculaires par $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$; p_r, p_{r+1} étant deux perpendiculaires consécutives, l'aire du quadrilatère correspondant sera (§§ 2 et 3)

$$\frac{2p_r p_{r+1} - (p_r^2 + p_{r+1}^2)\cos(p_r, p_{r+1})}{2\sin(p_r, p_{r+1})},$$

et l'aire du polygone est égale à la somme de n expressions de cette forme. Il n'y a de difficultés que pour les signes : on les détermine ainsi. Du point O comme centre, et d'un rayon quelconque, on décrit une circonférence : allant d'une perpendiculaire à la suivante, toutes les fois qu'on marche dans le même sens, de 1 à 2, on prend l'expression

telle qu'elle est, et quand on marche dans le sens inverse, on prend l'expression avec le signe opposé; car le signe d'une des perpendiculaires devient négatif, et α se change dans $2^q - \alpha$. Il suffit de faire une figure pour se convaincre de la justesse de cette détermination de signes.

ARITHMOLOGIE.

Théorème. *a étant un nombre positif ou négatif de la forme $\dot{6}+1$; b un nombre positif de la forme $\dot{2}+1$ et x une quantité quelconque, on a l'équation*

$$\sum (-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2-b^2)x^{a^2+3b^2} = 0\ (^*).$$

(Jacobi. Crelle, tome XXI, page 13; 1840.)

Démonstration. Il suffit de démontrer que la somme des termes où x a le même exposant est nulle. Faisons

$$a^2+3b^2 = a'^2+3b'^2;$$

on satisfait, comme on sait, à cette équation par les *huit* valeurs suivantes :

$$a' = \pm\frac{a-3b}{2}, \qquad b' = \pm\frac{a+b}{2},$$
$$a' = \pm\frac{a+3b}{2}, \qquad b' = \pm\frac{a-b}{2}.$$

Mais, d'après l'hypothèse, pour que $x^{a'^2+3b'^2}$ appartienne à la série, il faut que a', positif ou négatif, soit de la forme $\dot{6}-1$, et que b' soit positif et de la forme $\dot{2}+1$; ces conditions vont réduire le nombre de ces valeurs à une seule.

En effet, a étant impair, il n'y a que ces deux cas pos-

(*) Nous mettons le point leibnitzien pour indiquer un multiple.

sibles :

Premier cas. $\frac{a+b}{2}$ pair, $\frac{a-b}{2}$ impair,

Deuxième cas. $\frac{a+b}{2}$ impair, $\frac{a-b}{2}$ pair.

Représentons par $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ les *impairs* de ces quatre nombres : alors à $\varepsilon=+1$ correspond le deuxième cas, et à $\varepsilon=-1$ correspond le premier cas ; donc

$$\varepsilon=(-1)^{\frac{a-b}{2}}.$$

Comme b' est impair, on a donc

$$b'=\pm\frac{a+\varepsilon b}{2};$$

le nombre correspondant de a' est donc

$$a'=\pm\frac{a-3\varepsilon b}{2}$$

(on change b en $-\varepsilon b$) : mais b' devant être positif, nous pouvons écrire

$$a'=\pm\frac{a-3\varepsilon b}{2},\qquad b'=\varepsilon'\frac{a+\varepsilon b}{2},$$

ε' étant $=+1$ lorsque $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ est positif, et $\varepsilon'=-1$ lorsque $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ est négatif.

Si dans a' nous prenons le signe supérieur, alors $2a'-a$ devient divisible par 3 : mais a et a' étant tous de la forme $\dot{6}+1$, $2a'-a$ divisé par 3 laisse pour reste 1 ; le signe supérieur doit donc être rejeté ; on a donc

$$a'=-\frac{a-3\varepsilon b}{2}.$$

$2a' + a$ est divisible par 3, et a étant de la forme $\dot{6} + 1$, $2a'$ est de la forme $\dot{3} + 2$, et par conséquent a' de la forme $\dot{3} + 1$. Or on a

$$2b'\varepsilon' = a + b\varepsilon \quad (\text{car } \varepsilon'^2 = 1), \quad \text{et} \quad 2a' = 3b\varepsilon - a;$$

donc

$$a' + b\varepsilon' = 2b\varepsilon.$$

b étant impair, a' est donc aussi impair; donc a' est de la forme $\dot{6} + 1$. Ainsi

$$(1) \qquad a' = \frac{3\varepsilon b - a}{2}, \qquad b' = \varepsilon' \frac{a + \varepsilon b}{2};$$

on en déduit

$$(2) \qquad a = \frac{3b'\varepsilon' - a'}{2}, \qquad b = \varepsilon \frac{a' + \varepsilon' b'}{2}.$$

Les équations (2) sont de la même forme que les équations (1), ε et ε' ont changé de rôle; et comme b doit être impair, on voit que, pour $\varepsilon' = +1$, $\frac{a' + b'}{2}$ est impair, et $\frac{a' - b'}{2}$ pair; et pour $\varepsilon' = -1$, $\frac{a' - b'}{2}$ est impair et $\frac{a' + b'}{2}$ est pair; donc

$$\varepsilon' = (-1)^{\frac{a' - b'}{2}}.$$

Les équations (2) montrent que les mêmes opérations par lesquelles on a déduit a' et b' de a et de b, conduiraient de a' et b' vers a et b; les deux systèmes de valeurs a, b et a' et b' ont donc une relation de réciprocité, et, en continuant les opérations, on reviendrait aux précédentes valeurs. Il suffit donc, pour la démonstration, que les deux coefficients de $x^{a^2 + 3b^2}$ et de $x^{a'^2 + 3b'^2}$ soient égaux et de signes opposés.

La somme de ces coefficients est

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2-b^2)+(-1)^{\frac{+a'-b'}{2}} b'(a'^2-b'^2).$$

Substituant pour a' et b' les valeurs tirées de l'équation (1), on a

$$a'^2-b'^2=-2\varepsilon b(a-\varepsilon b),$$

et de là

$$b'(a'^2-b'^2)=-\varepsilon\varepsilon' b(a^2-b^2);$$

la somme des coefficients devient donc

$$b(a^2-b^2)\left[(-1)^{\frac{a-b}{2}}-\varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{a'-b'}{2}}\right].$$

Mais

$$\varepsilon=(-1)^{\frac{a-b}{2}},\qquad \varepsilon'=(-1)^{\frac{a'-b'}{2}},$$

d'où

$$\varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{a'-b'}{2}}=(-1)^{\frac{a-b}{2}};$$

donc cette somme est nulle. C. Q. F. D.

Observation. Le cas peut se présenter où $a'=a$ et $b'=b$; alors la première des équations (2) donne

$$a=b\varepsilon;\quad \text{donc}\quad a^2-b^2=0;$$

ce qui vérifie évidemment le théorème.

SUR L'IMPOSSIBILITÉ, EN NOMBRES ENTIERS, DE L'ÉQUATION $x^m = y^2 + 1$;

PAR M. LEBESGUE.

Selon M. Catalan, deux nombres consécutifs, autres que 8 et 9, ne peuvent être des puissances (*Ann.*, t. I, p. 520); en d'autres termes, l'équation $x^m = y^n + 1$ est impossible.

L'impossibilité est manifeste pour $m = n$, et plus généralement pour le cas dans lequel m et n ont un diviseur commun. On peut donc ramener tous les cas à ceux de m et n premiers en changeant les inconnues. Voici la démonstration pour le cas de $n = 2$ et m impair.

Elle repose sur les propriétés élémentaires des nombres entiers complexes $a + b\sqrt{-1}$ (a, b entiers, positifs ou négatifs), introduits par M. Gauss dans la *Théorie des Nombres*. Il suffira de dire ici qu'en représentant par a_1, a_2, a_3, etc., une suite d'entiers $\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}$, $\alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1}$, etc., liés par des équations telles que

$$a_i = q_i\, a_{i+1} + a_{i+2};$$

mettant le quotient $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ sous la forme $b_i + c_i\sqrt{-1}$, et faisant $q_i = B_i + C_i\sqrt{-1}$, en supposant que B_i, C_i soient les entiers les plus près (par excès ou défaut) de b_i, c_i, c'est-à-dire tels, que les valeurs absolues des différences $b_i - B_i$, $c_i - C_i$ ne surpassent jamais $\frac{1}{2}$, alors le carré du module de a_{i+2}, ou $(\alpha_{i+2})^2 + (\beta_{i+2})^2$, en faisant $a_{i+2} = \alpha_{i+2} + \beta_{i+2}\sqrt{-1}$, sera moindre que la moitié du carré du module de a_{i+1}.

(*Nota*. On donne le nom de *norme* au carré du module.) On voit donc que la série a_1, a_2, a_3, etc., se terminera par un nombre dont la norme sera 0 ou 1. (Voir *Nouvelles Annales*, tome III, page 340.)

Au moyen de ce théorème de M. Gauss, on peut étendre aux entiers $a+b\sqrt{-1}$ toutes les propositions correspondantes à celles qui existent pour les entiers ordinaires, relativement à la décomposition en facteurs simples ou premiers. De là, au moyen du théorème de Waring, on établirait sans difficulté que tout nombre premier p de forme $4k+1$ est la somme de deux carrés :

$$p=a^2+b^2=(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1}).$$

Il suffira d'avoir indiqué en passant cette application déjà faite par M. Dirichlet.

Au moyen du même théorème, on peut prouver aussi l'impossibilité de l'équation

$$x^m=y^2+1=(y+\sqrt{-1})(y-\sqrt{-1}).$$

Si les facteurs $y+\sqrt{-1}$, $y-\sqrt{-1}$ avaient un facteur commun, il diviserait la différence $2\sqrt{-1}$; or, y impair donnerait $y^2+1=4k+2$ qui n'est pas une puissance; donc y est divisible par 2; $\sqrt{-1}$ ne l'est pas; les facteurs communs ne peuvent donc être que $+1$, -1, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, qui sont diviseurs de tous les nombres. Ainsi $y+\sqrt{-1}$ et $y-\sqrt{-1}$ sont premiers entre eux; et puisque y^2+1 est une puissance $m^{\text{ième}}$, il faudra poser

$$y+\sqrt{-1}=(u+v\sqrt{-1})^m(\sqrt{-1})^\alpha,$$
$$y-\sqrt{-1}=(u-v\sqrt{-1})^m(-\sqrt{-1})^\alpha,$$
$$y^2+1=(u^2+v^2)^m=x^m,\quad x=u^2+v^2.$$

Comme y est pair et x impair, l'un des nombres u, v

est pair. De là

$$2\sqrt{-1} = \left[(u+v\sqrt{-1})^m - (u-v\sqrt{-1})^m\right](-1)^\alpha(\sqrt{-1})^\alpha;$$

savoir, pour α pair $= 2\beta$,

$$(-1)^\beta = m.u^{m-1}v - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}u^{m-3}v^3 + \ldots \pm v^m;$$

et pour α impair $= 2\beta + 1$.

$$(-1)^\beta = u^m - \frac{m.m-1}{1.2}u^{m-2}v^2 + \ldots \pm muv^{m-1};$$

la première équation donne $v = \pm 1$, la deuxième, $u = \pm 1$, puisque u et v divisent $(-1)^\beta = \pm 1$.

On aura donc, dans les deux cas,

$$1 - \frac{m.m-1}{1.2}p^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}p^4 - \ldots = \pm 1;$$

p étant égal à u ou à v, et toujours pair. Avec le signe inférieur, l'équation est impossible, car elle donnerait 2 divisible par 4. Avec le signe supérieur on a, en divisant par p^2,

$$(A) \quad \frac{m.m-1}{1.2} - \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}p^2 + \ldots = 0.$$

Or cette équation est impossible. Cela est évident pour $\frac{m.m-1}{1.2}$ impair; pour $\frac{m.m-1}{1.2}$ pair, l'impossibilité s'établit ainsi qu'il suit :

Soit $A\theta^\alpha + B\theta^\beta + C\theta^\gamma + \ldots$ une fonction entière où les entiers A, B, C, etc., sont premiers à θ; si les exposants entiers positifs α, β, γ, etc., ne vont pas en décroissant, et que α soit moindre que tous les autres, on ne saurait avoir $A\theta^\alpha + B\theta^\beta + \ldots = 0$; car il en résulterait

$A + B\theta^{\beta-\alpha} + C\theta^{\gamma-\alpha} + \ldots = 0$, d'où A divisible par θ contre l'hypothèse.

Or l'équation (A) rentre dans ce cas. Si l'on prend le terme général de l'équation A, et qu'on l'écrive ainsi

$$\frac{m.m-1}{1.2} \times \frac{m-2.m-3\ldots m-2k+1}{1.2\ldots 2k-2} \times \frac{1.2.p^{2k-2}}{2k-1.2k};$$

les deux premiers facteurs étant entiers, et le premier pair par hypothèse, le dernier facteur n'est pas nécessairement entier; mais la puissance de 2 qui divise le numérateur surpasse la puissance de 2 qui divise le dénominateur, si la puissance de 2, qui divise p^{2k-2}, surpasse la puissance de 2 qui divise k. Or, c'est ce qui a lieu; p est pair, donc p^{2k-2} est divisible au moins par

$$2^{2k-2} = (1+1)^{2k-2} = 1 + 2k - 2 + \alpha = k + k - 1 + \ldots > k.$$

Ainsi le troisième facteur a la forme $\frac{2^{\alpha}.i}{i'}$, i et i' étant des entiers impairs; on voit donc que dans le terme général, qui est nécessairement entier, l'exposant de 2 est plus grand que dans le premier terme $\frac{m.m-1}{1.2}$; l'équation (A) est donc impossible.

Les autres cas de l'équation $x^m = y^n + 1$ paraissent présenter plus de difficulté. Je n'ai pu savoir jusqu'ici ce que M. Catalan a trouvé à ce sujet.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET DE CALCUL INFINITÉSIMAL;

PAR M. STREBOR.

I. Soient X, Y deux points pris sur les prolongements des axes d'une ellipse dont on désigne le centre par O, tels

que, si P, Q sont respectivement les points de contact des tangentes menées de X, Y, les angles OXP, OYQ soient égaux. Trouver la courbe, lieu du point, dont OX, OY sont les coordonnées.

II. Maserès, dans ses *Scriptores Logarithmici*, a remarqué que :

Si la fonction $y = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$, étant développée suivant les puissances de x, donne la série

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \ldots,$$

le développement de x, suivant les puissances de y, sera

$$x = a_1 y - a_3 y^3 + a_5 y^5 - a_7 y^7 + \ldots.$$

III. Soient deux paraboles ayant même foyer, et s'entrecoupant orthogonalement, qui touchent respectivement deux ellipses homofocales données, dont un des foyers coïncide avec celui des paraboles. Les points d'intersection de toutes les paires de paraboles qui satisfont à cette condition seront situés sur une circonférence de cercle, ayant pour centre le foyer commun des paraboles.

IV. Trouver en coordonnées elliptiques l'équation d'une parabole quelconque, tangente à une ellipse donnée, et dont le foyer coïncide avec un des foyers de l'ellipse.

V. Soient

$$\Theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}},$$

et

$$\Theta' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\theta \sin^2\varphi}};$$

il faut prouver que

$$\frac{\Theta}{\Theta'} - \frac{2\log(4 \sin\theta \operatorname{tang}\theta)}{\pi} > 0.$$

IV. Désignons par A l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}};$$

il faut prouver que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\log(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\sin^2\varphi)\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta)}\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{6}\left(\log 8e^{-\pi}\right)A^2.$$

VII. Trouver la courbe, lieu du sommet d'une hyperbole équilatère, tangente à une cassinoïde donnée, et concentrique avec elle.

THÉORÈME SUR LES ARCS DES OVALES DE DESCARTES;

PAR M. STREBOR.

L'arc d'un ovale de Descartes (ou d'une ligne aplanétique) s'exprime par une fonction ultra-elliptique dans laquelle la quantité soumise au signe radical monte jusqu'au septième degré; mais, malgré la complication de ce résultat, on peut déterminer algébriquement sur cette courbe, d'une infinité de manières, des arcs dont les différences sont réductibles aux arcs d'ellipse.

NOTE

Sur la somme des angles d'un polygone plan et sur l'aire du polygone sphérique;

PAR M. BARBET,
Chef d'institution.

On distingue trois espèces de polygones plans ou sphériques.

1°. *Polygones convexes;* aucun côté n'est rencontré par un côté non adjacent; aucun angle intérieur n'est plus grand que deux angles droits.

2°. *Polygones non convexes;* aucun côté n'est rencontré par un côté non adjacent. Il y a des angles intérieurs plus grands que deux angles droits.

3°. *Polygones étoilés;* un côté est rencontré par un côté ou par plusieurs côtés non adjacents.

Dans ce qui suit, il ne s'agit que de polygones non étoilés.

1. Théorème. *Dans un polygone convexe, la somme des angles intérieurs est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

Démonstration. Soit un polygone de n côtés. Supposons que le théorème subsiste pour $n - 1$ côtés. Soient A, B, C trois sommets consécutifs : menons la diagonale AC; elle forme évidemment, avec les côtés restants, un polygone de $n - 1$ côtés. La somme des angles de ce polygone est égale, par hypothèse, à $2(n-3)$ ou à $2n-6$ angles droits; joignant à cette somme celle des trois angles du triangle A, B, C, on obtient évidemment la somme des angles du polygone donné, somme égale à

$$2n - 6 + 2 = 2n - 4 = 2(n-2);$$

donc le théorème subsiste aussi pour un polygone de n cotés. Or il subsiste pour le triangle; donc, etc.

Même démonstration pour l'aire d'un polygone sphérique convexe.

2. *Lemme.* Dans tout polygone non convexe, il est toujours possible de mener au moins une diagonale qui ne soit rencontrée par aucun côté non prolongé du polygone.

Démonstration. Soient A, B, C trois sommets consécutifs; menons la diagonale BC. Si elle ne rencontre

aucun côté du polygone, c'est la diagonale demandée; si elle rencontre un côté ou plusieurs, concevons qu'elle se meuve parallèlement à elle-même, en se rapprochant du sommet B. Il arrivera nécessairement un moment où, passant par un ou plusieurs sommets du polygone, il n'y en aura plus entre elle et le sommet B; soit O un de ces derniers sommets. Menons la droite OB; c'est une diagonale et non un côté, puisque deux côtés BA, BC passent par B, et cette diagonale OB ne peut être rencontrée par un côté, à moins que ce côté n'entre dans le triangle et coupe un des côtés BA, BC; ce qui est impossible, puisque le polygone n'est pas étoilé; donc, etc.

Observation. Même démonstration pour les polygones sphériques non convexes; il faut concevoir que le plan du grand cercle BC se meuve parallèlement à lui même.

3. Théorème. *Dans un polygone non convexe, la somme des angles intérieurs est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

Démonstration. Soit un polygone de n côtés; supposons que le théorème subsiste pour tout nombre de côtés moindre que n. Menons une diagonale qui ne soit rencontrée par aucun côté (§ 2). Supposons que cette diagonale ait p côtés du polygone à sa droite et q à sa gauche; de sorte qu'on a $p+q=n$. Cette diagonale forme, avec les p côtés, un polygone de $p+1$ côtés, et avec les q côtés, un polygone de $q+1$ côtés; et l'on a $p+1<n$, $q+1<n$; donc, suivant l'hypothèse, les sommes des angles intérieurs dans chacun de ces polygones sont $2(p-1)$ droits et $2(q-1)$ droits, et ensemble $2(p+q-2)=2(n-2)$. Mais l'ensemble de ces sommes est égal à la somme des angles du polygone donné; donc le théorème subsiste pour n cotés. Le théorème est évident pour un quadrilatère non convexe; il est donc vrai pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

Observation. Même démonstration pour trouver *l'aire* d'un polygone sphérique non convexe.

4. Théorème. *Dans tout polygone plan, la somme des angles* en dehors *est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés* plus *deux.*

Démonstration. Un angle intérieur plus son angle *en dehors* vaut quatre angles droits; donc, etc.

5. Concevons qu'un point décrive un polygone toujours dans le même sens, à partir d'un sommet quelconque; à chaque sommet, le point change subitement sa direction dans celle du côté voisin; la différence des deux directions est mesurée par un angle qu'on nomme *angle extérieur*; il est le supplément à deux angles droits, par *défaut* pour un angle *saillant* et par *excès* pour un angle rentrant.

6. Théorème. *Dans un polygone convexe, la somme des angles extérieurs est égale à quatre angles droits.*

Démonstration. Chaque angle intérieur plus l'angle *extérieur* correspondant vaut deux angles droits; donc, etc.

7. Théorème. *Dans un polygone non convexe, la somme des angles extérieurs correspondants à des angles saillants* moins *la somme des angles extérieurs correspondants à des angles rentrants, est égale à quatre angles droits.*

Démonstration. Pour un angle saillant S, l'angle extérieur est $2q - S$; pour un angle rentrant R, l'angle extérieur est $R - 2q$; donc, etc.

8. Théorème. *Tout polygone équiangle est convexe.*

Démonstration. Soit n le nombre de côtés; la valeur de chaque angle intérieur est donc $2q - \frac{4q}{n}$: tout angle interieur est donc moindre que deux angles droits; donc, etc.

9. Théorème. *Tout polygone non convexe a au moins trois angles saillants.*

Démonstration. Soit le polygone de n côtés ; si le polygone n'a que deux angles saillants, il aura $n - 2$ angles rentrants : la somme des angles intérieurs surpasserait donc $2n - 4$ angles droits, ce qui est impossible, etc.

10. Théorème. *Dans tout polygone convexe, la somme des* compléments *des angles intérieurs obtus moins la somme des compléments des angles intérieurs aigus, est égale à autant d'angles droits qu'il y a de côtés* moins *quatre.*

Démonstration. Soient n le nombre de côtés ; o le nombre d'angles obtus, et o' la somme de leurs compléments ; a le nombre d'angles aigus, et a' la somme de leurs compléments : la somme des angles intérieurs est donc $+ o' - a' + (o + a)$ angles droits, ou n angles droits $+ o' - a'$; donc $o' - a' = n - 4$ angles droits.

Corollaire. Tout polygone convexe, le triangle excepté, a au moins un angle obtus.

11. *Lemme.* Soit le trilatère ABCD, formé par les droites AB, BC, CD. Élevant en B une perpendiculaire à la droite AB, et en C une perpendiculaire à la droite CD, l'angle BOC formé par les deux perpendiculaires BO, CO, est égal à quatre angles droits moins la somme des angles ABC + BCD.

12. Théorème. *Si un point mobile décrit une courbe plane sans inflexion et toujours dans le même sens, la somme de tous les changements de direction est égale à l'angle formé par les deux normales menées au point de départ et au point d'arrivée.*

Démonstration. Soient AMB la courbe parcourue ; A le point de départ et B le point d'arrivée ; AP la direction de la tangente en A indiquée par le sens du mouvement de départ, et BQ la direction de la tangente en B, indiquée

par le sens du mouvement d'arrivée. Si le point parvenu en B parcourait la corde BA pour revenir en A, la somme totale de ces changements de direction serait égale à quatre angles droits (§ 6); mais, depuis qu'il est parti de B, le point a changé deux fois de direction en B; ce changement est mesuré par l'angle QBA, et en A il est mesuré par l'angle BAP. Donc la somme des changements de direction subis pendant le parcours de l'arc AMB est égale à quatre angles droits moins la somme des angles QBA + BAP; et, d'après le lemme précédent, cette différence est égale à l'angle formé par les perpendiculaires aux tangentes, c'est-à-dire par les normales. C. Q. F. D.

Observation. Lorsque les normales sont parallèles, elles sont censées former ensemble deux angles droits; de même lorsque, formant une droite, elles sont dirigées en sens opposés. Ainsi, un point décrivant une demi-circonférence ou une demi-ellipse, la somme de ses changements de direction est égale, dans les deux cas, à deux angles droits. Il faut toujours prendre la normale dirigée vers le centre de courbure.

Remarque. Pour les polygones réguliers étoilés, *voyez* tome VIII, page 68.

SOLUTION DE LA QUESTION 66

(voir t. II, p. 326);

PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Élève (institution Sainte-Barbe).

---

1. *Lemme.* Une ligne plane de degré m étant rapportée à des axes rectilignes, si l'on divise proportionnellement toutes les ordonnées, les points de division sont sur une ligne de même degré.

Observation. Ce lemme subsiste pour les surfaces.

2. *Lemme.* Chaque corde d'un système de cordes parallèles dans une conique étant partagée proportionnellement, les points de division sont aussi sur une conique.

Démonstration. Les moitiés des cordes sont aussi partagées proportionnellement; mais les milieux des cordes parallèles sont sur une même droite; donc les moitiés peuvent être considérées comme des ordonnées, et l'on retombe sur le lemme précédent.

Observation. Le lemme subsiste pour une surface du second degré; car les milieux des cordes parallèles sont sur un même plan.

3. *Question* 66. On donne une conique et un diamètre. Trouver sur le diamètre un point tel, qu'en menant par ce point une parallèle à une droite donnée, les deux segments de la sécante soient dans un rapport donné.

Solution. Concevons un système de cordes ayant toutes la direction *donnée*. Divisant ces cordes dans le rapport *donné,* les points de division sont sur une conique (*lemme* 2). Donc le point cherché est sur l'intersection de cette conique avec le diamètre, et l'on sait qu'on peut toujours trouver l'intersection d'une conique et d'une droite sans construire la conique, pourvu que la conique soit déterminée par cinq *données;* de sorte que le problème est également facile pour une droite quelconque non diamétrale. D'ailleurs, on prouve aisément que la seconde conique est concentrique à la conique donnée. La discussion relative aux trois espèces de coniques ne présente aucune difficulté. Le problème, toujours possible pour l'ellipse, devient impossible dans la parabole lorsque la direction *donnée* est un diamètre, et dans l'hyperbole lorsque cette direction est une asymptote.

Observation. Une solution analogue a lieu pour le problème analogue et pour une surface du second degré.

SUR LE CALCUL DE π

(voir t. I, p. 190 ; t. II, p. 188 ; t. III, p. 13 et 58 ; t. IV, p. 156 . t. IX, p. 12).

PAR M. A. FANIEN,
Professeur à Redon (Ille-et-Vilaine).

La méthode simple et facile de Lacroix donne

$$c_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{4 - (2c)^2}},$$

c désignant le côté du polygone régulier inscrit de n côtés ; c_1 le côté du polygone de $2n$ côtés, et le diamètre étant pris pour 1. On tire de là

$$c_m = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{4 - (2c)^2}}}}.$$

Le nombre des radicaux superposés est $m + 1$. On démontre que

$$C_1 - c_1 < \frac{1}{8}(C - c),$$

et, par suite,

$$C_m - c_m < \frac{1}{8^m}(C - c),$$

$C_1, \ldots, C_m$ désignant les côtés des polygones circonscrits semblables. Donc P, $P_1, \ldots, P_m$; p, $p_1, \ldots, p_m$ désignant les périmètres, on a

$$P_m - p_m < \frac{n.2^m(C - c)}{8^m} = \frac{P - p}{4^m}.$$

Donc $\frac{1}{10^k}$ désignant l'approximation demandée pour π, on devra avoir

$$\frac{P - p}{4^m} < \frac{1}{10^k},$$

d'où

$$4^m > 10^k (P - p),$$

ou, par logarithmes,

$$m \overset{=}{>} \frac{k + \log(P - p)}{\log 4}.$$

Ainsi, n étant 6, on a

$P = 2\sqrt{3}$, $p = 3$, $P - p = 2\sqrt{3} - 3 < 1$, $\log 4 > 0,6$,

d'où

$$m \overset{=}{>} \frac{k}{0,6} = \frac{10\,k}{6}.$$

Par exemple, pour $k = 6$, on prendra $m = 10$, et, par suite, dans l'expression c_m, on devra prendre onze radicaux pour que le périmètre p_m soit la valeur approchée de π à $\frac{1}{10^6}$.

Mais, dans l'expression

$$p_m = 2^m.n\,.\,c_m = 2^{m-1}.n.\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{4 - (2c)^2}}}},$$

le radical devant être multiplié par $2^{m-1}.n$ pour avoir p_m, et par suite π à moins de $\frac{1}{10^k}$, ce radical doit être évalué à moins d'une fraction plus petite que $\frac{1}{2^{m-1}.n.10^k}$. Ainsi, pour $n = 6$, $k = 6$, $m = 10$, on a

$$\frac{1}{2^9.6.10^6} > \frac{1}{10^{10}}.$$

D'autre part, on sait qu'en extrayant la racine de 3 à $\frac{1}{10^{10}}$ et la racine de $2 + \sqrt{3}$, à moins de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^{10}}$, on a $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$,

à moins de $\frac{1}{10^{10}}$, et ainsi de suite. Donc l'expression

$$p_m = 2^{m-1}.6.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{3}}}}$$

donne π en prenant onze radicaux et extrayant les racines carrées successives avec l'approximation indiquée plus haut.

Pour $k = 8$, on a $m > \frac{80}{6}$ ou $m = 14$; approximation $\frac{1}{2^{13}.6.10^8} > \frac{1}{10^{13}}$. Donc en prenant quinze radicaux et extrayant les racines à moins de $\frac{1}{10^{13}}$, on aura π à moins de $\frac{1}{10^8}$.

D'ailleurs on a la formule remarquable (*)

$$\pi = 2^{m-1}n.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

Les quatre méthodes dites des périmètres, des isopérimètres, des surfaces et des surfaces équivalentes ne sont que des transformations apparentes de la méthode précédente, et, par suite, on leur accorde peut-être une trop grande importance dans les examens.

FORMULE BAROMÉTRIQUE SIMPLIFIÉE D'APRÈS M. BABINET;

PAR M. PHILIPPE KORALEK,
Professeur.

Dans la séance du 18 mars 1850, M. Babinet a communiqué à l'Institut une formule pour la détermination des hauteurs des montagnes au moyen des observations du baromètre, formule qu'il a employée il y a plusieurs années,

(*) Connue de Viète.

et dont M. Liouville a donné connaissance en 1840, dans son cours au Collége de France.

La formule de Laplace, employée dans le cas dont il s'agit, est

$$18393 (\log H - \log h)\left(1 + 2\,\frac{T+t}{1000}\right).$$

Celle de M. Babinet, débarrassée de logarithmes, est

$$16000\left(\frac{H-h}{H+h}\right)\left(1 + 2\,\frac{T+t}{1000}\right).$$

Pour faire voir que la seconde supplée la première, il suffit de démontrer l'égalité suivante :

$$18393 (\log H - \log h) = 16000\left(\frac{H-h}{H+h}\right).$$

Posons

$$H + h = S, \quad \text{et} \quad H - h = D;$$

nous aurons

$$\log H - \log h = \log\frac{H}{h} = \log\frac{S+D}{S-D}.$$

En divisant au numérateur et au dénominateur par S, on obtient

$$\log\frac{H}{h} = \log\frac{1+\frac{D}{S}}{1-\frac{D}{S}} = \log\left(1+\frac{D}{S}\right) - \log\left(1-\frac{D}{S}\right).$$

On connaît d'ailleurs les expressions

$$\log(1+x) = K\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right);$$

$$\log(1-x) = -K\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right).$$

En retranchant la seconde de la première, on a

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2K\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Remplaçant x par $\frac{D}{S}$, on a

$$\log \frac{H}{h} = 2K \left(\frac{D}{S} + \frac{D^3}{3S^3} + \frac{D^5}{5S^5} + \ldots \right).$$

En général, $\frac{D}{S}$ est plus petit que $\frac{1}{10}$; par conséquent on peut négliger $\frac{D^3}{3S^3}$; à plus forte raison $\frac{D^5}{5S^5}$, etc., etc.

L'expression peut donc être ramenée à la forme

$$\log \frac{H}{h} = 2K \frac{D}{S} = 2K \frac{H-h}{H+h};$$

mais

$$K = 0,434204, \quad \text{et} \quad 2K = 0,86859.$$

On peut donc écrire

$$18393 \times \log \frac{H}{h} = 18393 \times 0,86859 \frac{H-h}{H+h};$$

or

$$18393 \times 0,86859 = 15975,97587.$$

En prenant pour le second membre de cette dernière égalité 16000, l'erreur est d'environ 24 unités. Mais on a négligé une quantité plus grande que $\frac{D^3}{3S^3}$, il faut donc forcer le facteur de $\frac{H-h}{H+h}$.

D'ailleurs cette dernière expression est, dans les cas les plus généraux, plus petite que $\frac{1}{10}$, en sorte qu'on peut estimer dans ce cas que l'erreur est comprise entre 1 et 2 mètres.

On sait, au reste, que dans les nivellements pratiques et directs on ne doit pas compter sur une exactitude plus grande.

Nous rappellerons que M. Babinet engage à ne pas prendre cette formule pour des hauteurs excédant 1000 mètres.

Dans le cas où cette hauteur est plus grande, on peut prendre une station intermédiaire.

DE LA MANIÈRE DE BIEN CONDITIONNER LES TRIANGLES DANS LES LEVERS; ET NOTE HISTORIQUE SUR ROGER COTES.

1. Un triangle, généralement parlant, est déterminé quand on en connaît trois parties, parmi lesquelles doit se trouver au moins un côté. Ainsi, sur le terrain, on mesure trois éléments du triangle, et on déduit par le calcul les trois autres parties. Si l'on se trompe dans les mesures, il y aura aussi des erreurs dans les parties calculées, à moins qu'elles ne se compensent fortuitement. Il s'agit donc de savoir : 1° quelle est l'influence des erreurs commises dans les parties mesurées; 2° quelle forme il faut donner aux triangles pour que cette influence soit la moindre possible. Le célèbre Roger Cotes, dont nous parlerons plus bas, est le premier qui ait soulevé et résolu ce genre de questions. Ensuite, les principaux auteurs qu'on peut consulter sur cette matière sont :

1°. Bouguer, *la Figure de la terre*, page 86, 1749; c'est celui qui a le plus avancé la question et le plus approché de la vraie solution.

2°. Cagnoli, *Trigonométrie*, page 198, deuxième édition, 1808; la première est de 1784 (traduit de l'italien par Chompré).

3°. Delambre, *Traité d'Astronomie*, tome III, page 529, 1814.

4°. Puissant, *Géodésie*, tome I, page 158, troisième édition, 1842; la deuxième édition est de 1805.

2. On suppose toujours tacitement qu'on a de bons instruments et de bons observateurs; de sorte que les erreurs impossibles à éviter, et provenant soit du matériel, soit du personnel, sont pourtant renfermées dans des limites très-resserrées. Il s'ensuit qu'on est suffisamment autorisé à considérer les *rapports* entre ces *erreurs*, comme des rapports entre des quantités infiniment petites, autrement, comme des rapports différentiels; aussi Roger Cotes et Bouguer ont déterminé ces rapports par des considérations de géométrie différentielle, et les auteurs plus modernes par des considérations d'analyse différentielle. Nous adoptons cette dernière méthode comme la plus courte. En voici un exemple. Soit ABC un triangle dans lequel on a mesuré la base b et les angles adjacents A et B; on veut connaître l'influence des erreurs commises dans la mesure des angles A et B sur la grandeur du côté à calculer a. On suppose que l'erreur sur la mesure de b est nulle. On procède ainsi :

$$a \sin B = b \sin A;$$

différentiant, on obtient

$$(1) \quad \sin B\, da + a \cos B\, dB = b \cos A\, dA = a \sin B \cot A\, dA.$$

C'est un fait d'expérience que le même observateur, avec le même instrument, se trompe toujours de la même quantité, soit par excès ou par défaut, dans la mesure des angles; de sorte que l'on a

$$dA = dB \quad \text{ou bien} \quad dA = -dB.$$

Premier cas. $dA = dB$; on tire de l'équation (1)

$$da = a(\cot A - \cot B)\, dA;$$

ainsi moins B différera de A, ou, ce qui revient au même, moins la base mesurée b différera du côté a qu'il

s'agit d'évaluer, moins l'erreur sur cette évaluation sera grande.

Deuxième cas. $dA = -dB$; l'équation (1) donne

$$da = a(\cot A + \cot B)dA = \frac{a \sin(A + B)dA}{\sin A \sin B}$$
$$= a\frac{2\sin(A+B)dA}{\cos(A-B) - \cos(A+B)}.$$

Les erreurs sur A et sur B étant égales en sens inverse, l'évaluation de l'angle C ou de $2q - A - B$ est exacte; l'erreur da diminue à mesure que cos (A—B) augmente: ce qui ramène au même résultat que dans le cas précédent. De là cette règle générale due à Bouguer, et qu'il exprime ainsi : *Lorsqu'on est assujetti à donner une certaine grandeur à l'angle compris entre deux côtés dont il s'agit de découvrir le rapport, il faut, le plus qu'on peut, rendre le triangle isocèle ou faire la base qu'on doit mesurer de même longueur que l'autre ligne.* (Figure de la terre, page 87.)

Roger Cotes était parvenu au même résultat, mais seulement pour le cas où l'angle *compris* est droit.

3. On a mesuré la base c et le côté b; on demande l'angle qu'il faut prendre pour B afin que l'erreur sur C devienne un minimum. On a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C;$$

d'où

$$0 = da(a - b\cos C) + ab\sin C\,dC,$$

et

$$dC = \frac{(b\cos C - a)da}{ab\sin C}.$$

Ainsi dC sera un minimum en faisant $b\cos C = a$; alors B doit être un angle droit : telle est, à ce qui nous semble, la solution peu claire donnée par Bouguer. M. le général Piobert, examinateur à l'École d'application de Metz, a

indiqué, il y a plusieurs années, dans le cours des examens, une solution plus complète du problème, et que nous rapporterons comme il suit.

Les solutions précédentes ne conviennent que dans le cas où l'on ne veut déterminer par le calcul qu'un seul côté du triangle, et où deux angles seulement ayant été mesurés, on suppose que les erreurs de ces angles sont égales. Ces solutions de cas hypothétiques ne sont pas applicables dans les opérations géodésiques d'une grande exactitude, pour lesquelles on mesure tous les angles et on calcule tous les côtés des triangles. Aussi, c'est à tort que, dans plusieurs ouvrages modernes, on a conclu de ces solutions que le triangle équilatéral était toujours le plus convenable à employer en géodésie, comme étant celui dans lequel les erreurs d'angles influaient le moins sur la longueur des côtés. D'ailleurs, même dans les hypothèses où l'on s'est placé pour le deuxième cas rapporté ci-dessus, la solution ne donne pas l'erreur absolue minimum; en effet, la valeur de cette erreur pouvant se mettre sous la forme

$$da = \frac{2a \sin C dA}{\cos(A-B) + \cos C},$$

l'on voit que si elle diminue avec $A - B$, elle diminue bien plus encore avec sin C ou quand C se rapproche de 0 degré ou de 180 degrés.

Si, maintenant, on applique les mêmes solutions au cas où l'on calcule les trois côtés des triangles, comme en géodésie, on voit que si l'on suppose les erreurs des angles A et B dans le même sens, l'erreur sur l'angle C sera égale à leur somme ou double, et le côté opposé c sera très-inexact; il sera donc important de choisir les autres angles de manière que le résultat soit le moins fautif. Si ε est l'erreur de mesure des angles, on aura $dc = a \sin 2\varepsilon$, ou à très-peu près, $dc = 2a \sin \varepsilon$, dans la solution indiquée

$A = B$; tandis qu'en général, C étant mesuré, on a sensiblement

$$dc = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin B},$$

erreur qui est plus petite que la précédente, tant que $B > 30$ degrés, et dont le minimum est donné par $B = 90$ degrés.

Dans le cas où les erreurs sur A et B sont égales et de signes contraires, l'angle C est exact, et l'erreur sur le côté opposé serait sensiblement nulle, si B approchait de 90 degrés; on a aussi

$$da = \frac{c \sin \varepsilon}{\sin B},$$

qui est également un minimum pour $B = 90$ degrés, de sorte que l'égalité des angles n'est nullement la meilleure solution dans les divers cas, où l'on suppose que les erreurs de mesure des angles sont égales.

La solution qui convient le mieux pour les calculs géodésiques est celle qui donne le triangle le moins déformé; en supposant une base AC donnée, la déformation dépend du déplacement du sommet B opposé, il faut donc que ce déplacement $BB' = D$ soit le plus petit possible; or il est facile de voir, à des infiniment petits du second ordre près, que

$$D = \sqrt{da^2 + dc^2 + 2\, da\, dc \cos B},$$

$$da \sin B = c \sin dA \quad \text{et} \quad dc \sin B = a \sin dC,$$

d'où

$$D = \sqrt{\frac{c^2 \sin^2 dA + a^2 \sin^2 dC + 2\, ac \cos B \sin dA \sin dC}{\sin^2 B}},$$

et D est un minimum pour $\sin B = 1$, $B = 90$ degrés.

Toutefois, le cas le plus avantageux est celui où le rapport du déplacement à la hauteur du triangle est un minimum; car, lorsqu'on lie deux points par une chaîne de triangles, il y a d'autant moins de chances d'erreurs

que les sommets sont moins *déplacés* et qu'il y a moins de triangles ou que les hauteurs des triangles sont plus grandes. Or ce rapport est

$$\frac{D}{c \sin A} = \frac{D}{a \sin C}$$

$$= \frac{1}{\sin B} \sqrt{\frac{\sin^2 dA}{\sin^2 A} + \frac{\sin^2 dC}{\sin^2 C} + \frac{2 \sin dA \sin dC \cos B}{\sin A \sin C}}.$$

Quelles que soient les erreurs dA et dC, la déformation sera d'autant plus petite que A et C, et surtout B, approcheront le plus de 90 degrés. Si dA et dC ne diffèrent pas beaucoup, on a

$$\frac{D}{c \sin A} = \frac{\sin dA \sqrt{\sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C \cos B}}{\sin A \sin B \sin C}.$$

Si, de plus, A et C ne diffèrent pas sensiblement, il vient

$$\frac{D}{a \sin A} = \frac{\sin dA}{\sin B \sin A} \sqrt{2 \pm \cos B},$$

suivant que les erreurs sont ou non de même signe. Si cos B était très-petit ou variait très-peu, le minimum serait donné par sin B sin A ou sin B sin C maximum ; alors

$$\cos B \sin A \, dB + \sin B \cos A \, dA = 0 :$$

mais

$$2A + B = 180°,$$

d'où

$$dB = -2dA \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} 2A + \operatorname{tang} B = 0.$$

Substituant la valeur de dB dans la première, il vient

$$2 \operatorname{tang} A - \operatorname{tang} B = 0,$$

d'où

$$2 \operatorname{tang} A = -\operatorname{tang} 2A = -\frac{2 \operatorname{tang} A}{1 - \operatorname{tang}^2 A} :$$

enfin

$$\text{tang}^2 A = 2,$$

donc

$$A = C = 54°44'7'',8 \quad \text{et} \quad B = 70°31'44'',4.$$

Observation. Dans un Mémoire présenté récemment à l'Académie par M. Gaucherel sur les meilleures conditions à donner aux triangles géodésiques, on combat les opinions émises à cet égard par M. Puissant; nous ne savons pas si M. Gaucherel s'est rencontré avec ce que M. Piobert a exposé il y a plusieurs années. (*Comptes rendus,* 25 février 1850, page 200.)

Roger Cotes. C'est encore un génie dont la courte apparition émerveilla les géomètres du XVIIe siècle. Cotes vit le jour à Burbage, petite ville du comté de Leicester, le 10 juillet 1682, et termina sa carrière terrestre à l'Université de Cambridge, le 5 juin 1716, âgé de 34 ans. N'étant encore que simple bachelier, il fut *exceptionnellement* promu à la chaire d'astronomie et de philosophie, fondée par le révérend Thomas Plume. Les fonds ne suffisant pas pour faire les expériences, le célèbre philologue Bentley, ami de Cotes, y suppléa à ses dépens et par des souscriptions. Un autre de ses amis, le célèbre Robert Smith, lui succéda dans cette chaire, et publia en un volume in-4° ses œuvres, six années après la mort de l'auteur, sous ce titre :

Harmonia mensurarum, sive Analysis et Synthesis per rationum et angulorum mensuras promotæ : accedunt alia opuscula mathematica per Rogerum Cotesium. Edidit et auxit Robertus, collegii S. Trinitatis apud Cantabrigienses socius; astronomiæ et experimentalis philosophiæ post Cotesium professor. Cantabrigia, MDCCXXII, in-4°.

Ce *Harmonia* est le principal ouvrage de Cotes; l'ouvrage est divisé en quatre parties.

Première partie. *Logometria.* Traité des théories logarithmiques et de leur application à la quadrature de l'hyperbole, à la chute verticale des graves dans un milieu résistant, à la densité des couches atmosphériques, à l'attraction d'un ellipsoïde de révolution sur un point placé à l'extrémité de son axe; aux trajectoires décrites par un point attiré par une force en raison inverse des cubes des distances.

Deuxième partie. *Theoremata tum logometrica tum trigonometrica.* Contient des intégrales ramenées à des logarithmes et à des fonctions circulaires. Ces intégrales ont dix-huit formes principales.

Ces formes se ramènent la plupart à

$$\int dx(a+bx^n)^p(a'+b'x^n)^q,$$

et il les intègre on ne sait par quelle méthode, car il ne donne que les intégrales; mais les logarithmes sont indiqués par une *barre verticale:* c'est du moins ce qu'il faut supposer pour se rendre compte de ces intégrales.

La dix-huitième et dernière forme est

$$\frac{x^{tn-1}dx}{(k+lx^n)\sqrt{e+fx^n+gx^{2n}}},$$

où t est un nombre entier, positif ou négatif, et n un exposant quelconque.

Ces formes sont suivies de cinq théorèmes sur des relations entre certaines intégrales. Voici le premier théorème; soient

$$Z=e+fx^n,\quad dX=z^{\theta n-1}Z^{\omega-1}dx,$$

$$dY=z^{\theta n+n-1}Z^{\omega-1},\quad dU=z^{\theta n-1}Z^{\omega}dx;$$

on aura

$$z^{\theta n}Z^{\omega}=n[\theta eX+(\theta+f\omega)Y],\quad U=eX+fY;$$

d'où l'on déduit les valeurs de X et de Y en fonctions de Z et de U.

Observation. Il est presque inutile d'avertir que Cotes fait usage du point newtonien pour désigner des différentielles.

Troisième partie. *Problematum analysis et constructio per formas præcedentes.* Application des intégrales précédentes à la quadrature de plusieurs courbes; la courbe des tangentes, des sécantes, etc. Application aux latitudes croissantes des marins, cissoïdes, spirales, caténaires, mouvement d'ascension verticale et de chute d'un grave, dans un milieu résistant. Lorsque certains coefficients deviennent imaginaires, il remplace les logarithmes par des lignes trigonométriques.

Observation. Le mot *logarithme* est composé de deux mots grecs λόγυ ἀριθμός, *mesure du rapport.*

En effet, soit le rapport $1 : a$, et supposons que l'unité croisse par quantité infiniment petite, jusqu'à ce qu'elle devienne égale à a. Partant de la valeur $1 + u$, elle prend la valeur infiniment voisine $1 + u + du$; le rapport $\frac{du}{1+u}$ est infiniment petit; supposons qu'il soit constant. La somme de tous ces rapports, depuis 1 jusqu'à a, est une quantité *finie* qu'on nomme *mesure du rapport*, et Cotes se sert presque toujours, non de l'expression dérivée du grec, mais de l'expression latine *rationis mensura.* Au lieu de supposer l'accroissement différentiel égal à du, on peut prendre Mdu, M étant un nombre constant quelconque. C'est ce nombre qu'on nomme *module,* et qui caractérise les divers systèmes de logarithmes; les logarithmes du même nombre croissent et décroissent dans le même rapport que le module; de même, les lignes trigonométriques croissent et décroissent avec le *rayon*, qui est aussi le module trigonométrique. Comme on passe

des logarithmes aux lignes trigonométriques et *vice versâ*, de là le titre *Harmonia mensurarum* et aussi *logometria*.

Quatrième partie. *Theoremata tum logometrica tum trigonometrica datarum fluxionum fluentes exhibentia per methodum mensurarum ulterius extensam.*

La logométrie et les dix-huit formes d'intégrales avaient paru en 1714, dans les *Transactions philosophiques*, où l'auteur les a dédiées à Ed. Halley; il continua d'y travailler, lorsqu'il fut attaqué de la fièvre dont il mourut. Il remit le manuscrit non achevé de cette quatrième partie à Robert Smith, son ami et son parent. Les feuilles ne consistant qu'en notes tyroniennes, présentèrent de grandes difficultés. Cependant Cotes, dans une Lettre du 3 mai 1716 adressée au docteur Jones, lui annonçait qu'il avait découvert une formule élégante et générale pour intégrer $\frac{z^{\theta n + \frac{\delta}{\lambda} n - 1} dz}{e + f z^n}$; e, f sont des constantes quelconques, n un exposant quelconque, $\frac{\delta}{\lambda}$ une fraction quelconque et θ un entier positif ou négatif. Voici ce que dit Smith dans la préface de cette quatrième partie :

Præclari hujus inventi indicio excitatus, ne carissimi amici famæ optimisque scientiis deessem, contuli me continuo ad ejus adversaria, quæ, quanquam primo intuitu sibyllæ foliis obscuriora videbantur, quod nullo ordine nec verbo erant explicata, multiplices tamen conjectandi occasiones præbendo, spem fortiter conceptam non fefellerunt.

La science et Cotes doivent beaucoup à Smith (*); car c'est cette quatrième partie qui renferme la plus brillante

(*) Smith, né en 1689, est mort en 1768.

découverte de Cotes. Les intégrations par décomposition en fractions rationnelles avaient déjà été données par Leibnitz depuis 1702. Mais l'illustre Allemand n'a pu aller au delà de $\int \frac{dx}{x^3 \pm a^3}$; tandis que Cotes donne l'intégrale générale $\int \frac{dx}{x^n \pm a^n}$ pour n entier, et en montre l'admirable relation, avec une propriété de la circonférence devenue célèbre sous le nom de théorème de Cotes, et généralisé depuis par Moivre. La quatrième partie contient quatre-vingt-quatorze formes générales d'intégrales, parmi lesquelles il y en a d'assez compliquées; par exemple, la quatre-vingt-cinquième est

$$z^{\theta n-1} dz \sqrt[4]{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}};$$

en rattachant toujours les intégrales à des constructions géométriques. Il était peut-être sur la voie des transcendantes elliptiques, et cela nous explique en quelque sorte ces paroles de Newton : *Si Cotes avait vécu, nous aurions su quelque chose.* Car Newton est aussi sublime dans ses divinations que dans ses découvertes. Il est à remarquer que les variations dans les éléments du triangle sphérique conduisent aux équations fondamentales des transcendantes elliptiques.

Smith parvint à déchiffrer dans ces mêmes papiers un théorème sur les courbes du troisième ordre, qu'il a communiqué à Maclaurin; celui-ci en a fait la base de son traité des propriétés des courbes géométriques : *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus Tractatus.* C'est le théorème de *collinéation* des centres des *moyennes harmoniques*, devenu un cas tout à fait particulier d'une théorie infiniment générale, embrassant les surfaces, et que nous donnerons incessamment d'après M. Grasmann.

Professeur de Philosophie expérimentale, Cotes dirigea

ses recherches vers l'optique, l'astronomie et la géométrie pratique. *Æstimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphærici.*

Tel est le titre d'un opuscule de vingt-deux pages, qui suit le *Harmonia mensurarum.* Cet opuscule n'a plus qu'un intérêt historique, étant le point de départ des travaux de ce genre. Il en est de même des autres opuscules qui terminent l'édition de Smith; ils ont pour objet:

1°. Faire passer une courbe parabolique par un nombre donné de points;

2°. De la construction des Tables par les différences; ce qu'il appelle la *Canonotechnie.*

Saunderson a démontré les *formes* de Cotes dans son ouvrage *The method of fluxions applied to M. Cotes formes,* et Walmsley, bénédictin anglais, a traduit en français le *Harmonia mensurarum* sous le titre *Analyse des mesures, des rapports et des angles*; 1748, in-4°.

QUESTIONS 219 ET 220

(voir t. IX, p. 11).

PAR M. A. H., abonné.

Deux angles trièdres trirectangles ayant même sommet:

1°. Les intersections de leurs six arêtes par un même plan sont sur une conique (*Question* 219).

2°. Leurs faces sont tangentes à une même surface conique du second degré (*Question* 220). (STEINER.)

Question 219. Il suffit de démontrer que les six arêtes sont sur une même surface conique du second degré.

Soient pris pour axes coordonnés les arêtes d'un des angles trièdres. Soient, de plus, $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$,

$(\alpha_2, 6_2, \gamma_2)$ les cosinus des angles $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)\ldots$, que font avec ces axes les arêtes de l'autre angle trièdre, de sorte que

$$(Q)\quad \left\{\begin{aligned}\alpha_0 6_0 + \alpha_1 6_1 + \alpha_2 6_2 &= \alpha_0\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2\\ &= 6_0\gamma_0 + 6_1\gamma_1 + 6_2\gamma_2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Une droite passant par l'origine est représentée par les équations

$$(E)\qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{6} = \frac{z}{\gamma}.$$

Pour qu'on puisse la considérer comme une quelconque des génératrices d'un cône du second ordre, il faut et il suffit qu'on ait

$$(P)\qquad A\alpha^2 + B6^2 + C\gamma^2 + D6\gamma + E\alpha\gamma + F\alpha 6 = 0.$$

Pour des valeurs réelles de A, B, C,..., cette équation (P) peut être vérifiée quand la droite (E) se confond successivement avec nos six arêtes. Pour les axes des X, Y, Z, on a

$$\alpha = 1,\quad 6 = \gamma = 0,\ldots;$$

la considération du premier angle trièdre réduit donc l'équation (P) à celle-ci :

$$(P')\qquad D6\gamma + E\alpha\gamma + F\alpha 6 = 0.$$

Il faut, à cause du second angle trièdre, qu'on ait

$$\begin{aligned}D6_0\gamma_0 + E\alpha_0\gamma_0 + F\alpha_0 6_0 &= 0,\\ D6_1\gamma_1 + E\alpha_1\gamma_1 + F\alpha_1 6_1 &= 0,\\ D6_2\gamma_2 + E\alpha_2\gamma_2 + F\alpha_2 6_2 &= 0.\end{aligned}$$

Or ces trois équations, ajoutées membre à membre, donnent $0 = 0$ à cause de l'équation (Q) ; elles se réduisent donc à deux, et déterminent les rapports entre les coefficients D, E, F. Le théorème est donc démontré.

Question **220.** Soient pris pour plans coordonnés la face de l'un des angles trièdres.

Soient, de plus, $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ les cosinus des angles que font avec ces plans les faces du second angle trièdre, ou, ce que revient au même, les cosinus des angles que font, avec les axes, les perpendiculaires à ces faces, de sorte que

$$(Q) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \alpha_0\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 \\ \qquad = \beta_0\gamma_0 + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0. \end{array} \right.$$

Un plan passant par l'origine est représenté par

$$(E) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Pour qu'on puisse considérer le plan comme tangent à un cône du second ordre, on reconnaît facilement, d'après un théorème démontré par MM. Briot et Bouquet, pages 218 et 219 de leur *Géométrie analytique*, qu'il faut et il suffit que

$$(P) \qquad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\beta\gamma + E\alpha\gamma + F\alpha\beta = 0;$$

pour que le plan (E) se confonde avec les plans coordonnés successivement, il faut que

$$A = B = C = 0,$$

ce qui donne, au lieu de (P),

$$(P') \qquad D\beta\gamma + E\alpha\gamma + F\alpha\beta = 0.$$

La démonstration se continue comme on vient de le voir.

Remarque. Le théorème 220 se déduit immédiatement, au moyen du *principe de dualité*, du théorème 219. Il suffit de considérer les cônes *supplémentaires* dont M. Chasles a fait un si remarquable usage dans ses Mémoires sur les cônes du second degré et les coniques sphériques; mais ces Mémoires (*Académie de Bruxelles*, 1830, 1831) étant très-rares, j'ai voulu démontrer directement les deux théorèmes.

SOLUTION DE LA QUESTION 200

(voir t. VIII, p. 44);

PAR M. EUGÈNE JUBÉ,
Professeur au lycée de Saint-Omer.

Si un point P se meut dans un plan de manière que la somme des carrés des tangentes PA_1, PA_2, ..., menées de ce point à une courbe algébrique de degré n, située dans ce plan, soit constante, la normale en P, au lieu géométrique de P, passe par le centre de moyenne distance des centres de courbure de la courbe, correspondants aux points de contact A_1, A_2, ...

Démonstration. Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe donnée. α et 6 étant les coordonnées de P, x' et y' celles d'un point de contact A_1, ces quantités sont liées par la relation $6 - y' = f'(x')(\alpha - x')$; et il y a une relation semblable pour chacun des autres points de contact. En considérant x' et y' comme coordonnées courantes dans cette équation, la courbe qu'elle représente coupe la première courbe aux points de contact des tangentes menées par le point P, de sorte que l'équation

$$(A) \qquad 6 - f(x') = f'(x')(\alpha - x')$$

est de degré $n(n-1)$, *première polaire* du point P.

Nommons x', x'', x''',..., les racines de cette équation, et y', y'', y''', ..., les ordonnées correspondantes à ces abscisses; puisque la somme des carrés des tangentes est constante, on doit avoir

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - 6)^2 + (x'' - \alpha)^2 + (y'' - 6)^2 \ldots = K^2,$$

ou bien

$$(B)\quad \begin{cases} n(n-1)(\alpha^2+6^2) - 2\alpha\sum x' - 26\sum(x') \\ \qquad\qquad + \sum x'^2 + \sum f(x')^2 = K^2. \end{cases}$$

On peut former $\sum x'$, $\sum f(x')$, $\sum x'^2$, $\sum f(x')^2$, au moyen des coefficients de l'équation (A); l'équation (B), qui ne contiendra plus alors que α et 6, appartiendra au lieu du point P.

La normale en P à ce lieu a pour équation

$$\eta - 6 = -\frac{d\alpha}{d6}(\xi - \alpha).$$

D'ailleurs, en nommant ξ', η', ξ'', η'', ..., les coordonnées des centres de courbure aux points A_1, A_2, ..., on a

$$\xi' - x' = -\frac{f'(x')[1+f'(x')^2]}{f''(x')}, \quad \eta' - y' = \frac{1+f'(x')^2}{f''(x')}, \ldots,$$

et si X et Y sont les coordonnées du centre de gravité de ces centres de courbure,

$$n(n-1)X = \xi' + \xi'' + \ldots, \quad n(n-1)Y = \eta' + \eta'', \ldots,$$

ce qui donne

$$n(n-1)X = \sum x' - \sum \frac{f'(x')[1+f'(x')^2]}{f''(x')},$$

$$n(n-1)Y = \sum f(x') + \sum \frac{1+f'(x')^2}{f''(x')}.$$

Remplaçant dans l'expression de la normale ξ et η par X et Y, j'obtiens

$$(C)\quad \begin{cases} \sum f(x')\,d6 + \sum \frac{1+f'(x')^2}{f''(x')}\,d6 - n(n-1)\,6\,d6 \\ + \sum x'\,d\alpha - \sum \frac{f'(x')[1+f'(x')^2]}{f''(x')}\,d\alpha - n(n-1)\,\alpha\,d\alpha; \end{cases}$$

expression identiquement nulle, car en y ajoutant membre à membre la différentielle de l'équation (B) qui est

$$n(n-1)\alpha d\alpha + 6d6) - \alpha \sum dx' - \sum x' d\alpha - 6 \sum f'(x') dx'$$
$$- d6 \sum f(x') + \sum x' dx' + \sum f''(x') f'(x')\, dx,$$

on obtient

$$\sum \left\{ \frac{1}{f''(x'')} [1 + f'(x')^2][(x' - \alpha) f''(x') dx' + d6 - f'(x') d\alpha] \right\},$$

qui est identiquement nul, puisque la différentielle de l'équation (A) donne

$$(x' - \alpha) f''(x') dx' + d6 - f'(x') d\alpha = 0.$$

La normale en P passe donc par le centre de gravité des centres de courbure correspondants aux points de contact.

Remarque. M. Lemonnier, professeur au lycée de Nantes, nous a adressé une autre solution analytique, comprise dans la solution géométrique qui suit.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PRÉCÉDENTE.

1. *Lemme.* Étant donné un nombre quelconque de cercles dans un même plan, le lieu géométrique du point dont la somme des carrés des tangentes à ces cercles, issues de ce point, est constante, est le même que le lieu du point dont la somme des carrés des distances aux centres de ces cercles est constante; donc ce lieu est une circonférence ayant pour centre le point de moyenne distance des centres des cercles.

2. D'un point P, concevons qu'on ait mené les $n(n-1)$ tangentes à une ligne de degré n, et qu'on ait décrit les

n (n — 1) cercles de courbure aux points de contact. Par hypothèse, la somme des carrés des tangentes aux cercles est constante; donc, d'après le lemme, le point P est sur une circonférence C, ayant pour centre le point de moyenne distance des centres de courbure. Mais chaque cercle de courbure a deux tangentes infiniment voisines, en commun avec la courbe donnée; donc le cercle C touche le lieu du point P en P. C. Q. F. D.

Note. Lorsque la quantité constante est infinie, le lieu du point P est une circonférence située à l'infini, et qui a pour centre le point de moyenne distance des centres de courbure; donc ce point est fixe. C'est le théorème de M. Duhamel (*voir* tome IV, page 180). En suivant une marche inverse à celle qui est indiquée à l'endroit cité, on revient au théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles.

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DES QUESTIONS 219, 220

(voir t. IX, p. 206).

---

1. *Lemme*. Toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point d'intersection des trois hauteurs du triangle.

2. *Lemme*. La directrice de toute parabole inscrite à un triangle passe par le point d'intersection des trois hauteurs du triangle. Les deux tangentes à la parabole passant par ce point, forment donc un angle droit.

3. *Lemme*. Un plan tangent à une sphère est rencontré par un système de diamètres conjugués en trois points, sommets d'un triangle; le point de contact est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle.

4. Théorème. *Dans une sphère, les six diamètres de deux systèmes de diamètres conjugués sont les arêtes d'un cône du second degré.*

Démonstration. Soient O le centre de la sphère; OA, OB, OC trois demi-diamètres conjugués, et Oa, Ob, Oc trois autres demi-diamètres conjugués. Par le point A, menons un plan tangent; il est parallèle au plan COB. Désignons par a', b', c' les points où ce plan est rencontré par les trois diamètres du second système. A est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle $a'b'c'$ (*Lemme* 3). Une hyperbole équilatère quelconque, circonscrite au triangle $a'b'c'$, passe par le point A (*Lemme* 1) : elle sera complétement déterminée si nous prenons OB, OC pour directions des asymptotes; donc le cône qui a son sommet en C et pour base l'hyperbole passe par les six arêtes Oa', Ob', Oc', OA, OB, OC. C. Q. F. D.

Corollaire 1. Un plan quelconque coupe ces six arêtes en six points sur une conique.

Corollaire 2. Les six arêtes de deux angles solides trirectangles ayant même sommet, sont coupées par un plan en six points qui sont sur une conique; car les six arêtes peuvent être considérées comme formant deux systèmes de diamètres conjugués dans une sphère. C'est la question 219.

5. Théorème. *Dans une sphère, les six plans diamétraux de deux systèmes de plans diamétraux conjugués sont tangents à un même cône du second degré.*

Démonstration. Mêmes données que dans le théorème précédent. Toute parabole inscrite au triangle $a'b'c'$ a une directrice qui passe par le point A (*Lemme* 2); elle sera complétement déterminée si nous prenons OB et OC pour directions des tangentes qui passent par A. Soient α, β, γ, δ, ε les cinq points de contact. Le cône O$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ touche évidemment les cinq faces O$a'b'$, O$a'c'$, O$b'c'$,

AOB, AOC; mais le plan BOC étant parallèle au plan de la parabole $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, touche le cône; donc, etc. C'est la question 220.

6. *Lemme*. x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; ...; x_n, y_n, z_n étant les coordonnées de n points, si l'on remplace partout x, y, z par ax, by, cz, en conservant les indices et prenant de nouveaux axes à volonté, on obtient n nouveaux points correspondants.

1°. Si p des points du premier système sont sur une surface de degré q, les points correspondants sont sur une surface du même degré.

2°. Le point de moyenne distance des points du premier système a pour correspondant le point de moyenne distance du second système.

3°. Des droites parallèles ou des plans parallèles dans le premier système, ont pour correspondants des droites parallèles et des plans parallèles dans le second système.

7. Théorème. *Dans un ellipsoïde, les six diamètres de deux systèmes de diamètres conjugués sont les arêtes d'un cône du second degré, et les six plans diamétraux sont tangents à un cône du second degré.*

Démonstration. Soit

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = a^2b^2c^2$$

l'équation d'un ellipsoïde rapporté à des diamètres conjugués: remplaçons x, y, z respectivement par $\frac{bcx}{r}$, $\frac{acy}{r}$, $\frac{abz}{r}$; nous aurons

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Prenant ces nouveaux axes rectangulaires, la surface correspondante à l'ellipsoïde est une sphère : d'après le lemme précédent, les diamètres conjugués dans l'ellipsoïde ont pour correspondants des diamètres conjugués dans la sphère; donc, etc.

Observation. Ce dernier théorème est de M. Chasles, qui l'a démontré en 1838 (*voir* le Journal de M. Liouville, tome III, page 398).

Comme on voit, c'est une transformation homologique du théorème de M. Steiner sur la sphère, énoncé sans démonstration, en 1832, dans son ouvrage *sur la dépendance des figures*, page 313. Il ajoute même que cette proposition est un cas particulier d'un théorème plus général.

SOLUTION DE LA QUESTION 217

(voir t. IX, p. 10);

PAR MM. A. ESTIENNE ET PLOIX (E.),
Élèves du lycée de Versailles.

Soient $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation d'une ellipse, les axes étant rectangulaires; soient x', y' les coordonnées du point M pris sur la conique. Dans le triangle rectangle MCK, j'ai

$$\text{MC} = \frac{\text{MK}}{\cos \text{CMK}}:$$

dans le triangle rectangle MIK, j'ai

$$\text{MK} = \frac{\text{MI}}{\cos \text{CMK}};$$

donc

$$\text{MC} = \frac{\text{MI}}{\cos^2 \text{CMK}}.$$

Or

$$\text{MI} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - c^2x^2},$$

et

$$\text{tang CMK} = \frac{cy'}{b^2};$$

d'où l'on conclut

$$\cos^2 \text{CMK} = \frac{b^4}{b^4 + c^2 y'^2},$$

ou bien

$$\cos^2 \text{CMK} = \frac{a^2 b^2}{a^4 - c^2 x'^2};$$

donc

$$\text{MC} = \frac{1}{a^4 b} (a^4 - c^2 x'^2)^{\frac{3}{2}},$$

qui est l'expression connue du rayon de courbure au point M. Pour l'hyperbole et la parabole, le calcul se ferait de la même manière.

THÉORÈME SUR LE CERCLE INSCRIT ET LE CERCLE CIRCONSCRIT AU TRIANGLE;

PAR M. NÉOROUZIAN,

Elève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Desalve), institution Sainte-Barbe.

THÉORÈME. *Si l'on mène un diamètre commun* MN *aux circonférences inscrite et circonscrite au triangle* ABC, *le rayon de la circonférence inscrite est moyen proportionnel entre les segments* MP *et* NQ, *compris entre les deux circonférences.*

Démonstration. Soient R et r les rayons des circonférences circonscrite et inscrite, et d la distance des centres. On a

$$\text{MP} = \text{R} - r - d, \quad \text{NQ} = \text{R} - r + d;$$

d'où

$$\text{MP} \times \text{NQ} = (\text{R} - r)^2 - d^2.$$

Or, d'après un théorème connu (*voyez* tome I, page 83),

$$d^2 = R(R - 2r);$$

donc

$$MP \times NQ = (R - r)^2 - R(R - 2r) = r^2.$$

C. Q. F. D.

NOTE SUR LA PARABOLE RAPPORTÉE A DEUX TANGENTES;

PAR M. JACQUINOT,
Élève (institution Mayer).

---

1. Soit une parabole rapportée à deux de ses tangentes prises pour axes. On a l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

et les trois équations de condition

$$B^2 = 4AC, \quad D^2 = 4AF, \quad E^2 = 4CF.$$

On peut toujours supposer $A > 0$, et alors on a nécessairement $C > 0$ et $F > 0$; les signes de B, D, E sont indéterminés.

Le coefficient différentiel est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2Cx + By + E}{2Ay + Bx + D}.$$

Éliminons B, D, E de l'équation donnée et de l'équation différentielle, nous aurons

$$(2)\quad Ay^2 \pm 2\sqrt{AC}\,xy + Cx^2 \pm 2\sqrt{AF}\,y \pm 2\sqrt{CF}\,x + F = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{C}{A}}\,\frac{(x\sqrt{C} \pm y\sqrt{A} \pm \sqrt{F})}{x\sqrt{C} \pm y\sqrt{A} \pm \sqrt{F}}.$$

Il faut distinguer deux cas.

1°. $BDE > 0$; alors le facteur linéaire est le même dans les deux termes de la fraction, et l'on trouve

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{C}{A}}.$$

En effet, dans ce cas, l'équation (2) est un carré parfait, et la parabole se réduit à une droite. Exemple : B, D, E positifs; l'équation (2) devient

$$(y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + \sqrt{F})^2 = 0.$$

2°. $BDE < 0$; la parabole est une courbe, les deux facteurs linéaires ne sont plus identiques, et $\frac{dy}{dx}$ n'a plus une valeur constante.

2. *Autrement.* On a

$$AE^2 + CD^2 = 8ACF, \quad BDE = \pm 8ACF;$$

donc

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 = 8ACF \mp 8ACF.$$

Pour BDE positif, L devient nulle, et la parabole se réduit à une *droite double;* pour BDE négatif, L est égale à 16 ACF, et la parabole reste courbe.

STATUE DE POISSON; SOUSCRIPTION.

Poisson, élève de l'École Polytechnique, professeur à cette École, membre de l'Académie des Sciences, marchant sur les traces de Laplace, maniant avec un égal succès la haute analyse et la haute physique, a conquis une réputation européenne. Né dans une condition extrêmement humble et parvenu à une position sociale élevée, il n'a jamais déserté la science. A elle appartiennent tous ses

travaux, son dernier jour, sa dernière pensée. Nouvel exemple que, dans notre société telle qu'elle est, le génie et un travail persévérant procurent des avantages que la médiocrité, c'est là son désespoir, voudrait obtenir tout de suite, sans génie et sans travail; chose impossible dans une société régulière quelconque.

Si nous essayions de faire l'éloge d'un tel homme, nous manquerions de modestie; en ne le faisant pas faire, l'Académie manque à son devoir. Pithiviers, ville natale de Poisson, s'honore en élevant, *par souscription,* une statue au grand mathématicien. On publiera la liste des souscripteurs; publication instructive qui pourra donner matière à réflexion.

On souscrit chez les notaires de l'endroit, et chez M. de Fienne, maire et promoteur éclairé de cette belle action.

On souscrit aussi à Paris, chez M. Lejeune, notaire, rue Lepelletier, n° 27.

SUR LES SÉRIES QUI EXPRIMENT UNE RACINE RÉELLE D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE (*);

PAR M. E. BRASSINE,

Professeur à l'École d'artillerie de Toulouse.

Représentons par $f(x) = 0$, une équation algébrique de la forme

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px + q = 0;$$

supposons qu'on ait trouvé, en série convergente, le développement d'une racine réelle de cette équation, et que

(*) *Voir* LACROIX, *Calcul différentiel,* tome Ier, page 285, et M. MOIGNO, *Calcul différentiel,* tome Ier, page 162; 1840.

cette série s'annule par l'hypothèse $q=0$, je dis qu'elle ne pourra représenter que la plus petite, numériquement, des racines de la proposée.

1°. Si l'équation est du second degré et de la forme

$$x^2+px+q=0,$$

il est clair que la série convergente, qui exprimerait la racine qui s'annule en même temps que q, ne pourrait représenter, abstraction faite du signe, que la plus petite racine, comme le prouve évidemment l'expression

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

2°. Si l'équation algébrique est du degré m, et si ses racines réelles, classées par ordre de grandeur, sont α, β, γ,..., μ, ρ, de telle sorte que α soit la plus petite, on pourra former avec ces racines les facteurs du second degré $(x-\alpha)(x-\beta)$, $(x-\alpha)(x-\gamma)$,..., $(x-\alpha)(x-\rho)$. La racine réelle exprimée en série, appartiendra nécessairement à un des facteurs du second degré; par exemple au facteur $(x-\alpha)(x-\gamma)$ que nous représenterons par x^2+kx+k'. Cela admis, le premier membre de l'équation $f(x)=0$, se mettra sous la forme

$$(x^2+kx+k')(x-\beta)(x-\delta)\times\ldots\times(x-\rho).(x-\alpha')(x-\beta')\ldots,$$

α', β',... étant des racines imaginaires. Or la racine développée en série et qui appartient au facteur x^2+kx+k', devient nulle pour l'hypothèse $k'=0$, puisque $k'=0$ entraîne nécessairement $q=0$ (q est le produit $k'\times\beta\times\delta\times\ldots\times\alpha'\times\beta'\ldots$). Donc la série qui développe la racine réelle de l'équation $f(x)=0$, qui devient nulle pour la supposition $q=0$, donne, si elle est convergente, la valeur approchée de la plus petite racine de cette équation.

3°. Si dans la proposée, les facteurs $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, etc., sont multiples, les raisonnements précédents existent encore; car α désignant la plus petite racine, on pourrait toujours supposer que la série développe une racine de l'équation du second degré $(x-\alpha)(x-\gamma)=0$. Dans ce cas, la proposée se mettrait sous la forme

$$(x^2+kx+k')(x-\alpha)^{n-1}(x-\beta)^{n'}\ldots=0.$$

L'hypothèse $k'=0$ rendant $q=0$, la racine développée serait égale à α.

4°. Appliquons ces considérations préliminaires à la série que Lagrange a donnée dans son grand ouvrage de la *Résolution des équations numériques* (Note XI). Si l'on considère l'équation

$$(1)\qquad u-x+f(x)=0,$$

u étant un paramètre quelconque, la série de Lagrange est (*)

$$F(x)=F(u)+F'(u)\times f(u)+\tfrac{1}{2}[F'(u)\times f(u)^2]'+\frac{1}{2.3}[F''(u)\times f^3(u)]''+\ldots;$$

les accents indiquent, suivant la notation de l'illustre géomètre, des dérivées successives des fonctions qu'ils affectent. Dans le cas particulier où l'on voudrait développer une racine x de l'équation (1), la série deviendrait

$$(2)\qquad x=u+f(u)+\tfrac{1}{2}[f(u)^2]'+\frac{1}{2.3}[f(u)^3]''+\ldots;$$

mais $-x+f(x)=0$ pouvant représenter une équation quelconque, le développement précédent dans lequel on ferait $u=0$, après avoir effectué les opérations indiquées, exprimerait une de ses racines, s'il était convergent. D'après la notation ci-dessus,

$$-x+f(x)=x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+\ldots+(p-1)x+q,$$

(*) Mémoires de Berlin, 1770.

posons

$$f(u) = u\varphi(u) + q,$$

d'où

$$\varphi(u) = u^{m-1} + au^{m-2} + \ldots + p.$$

On trouve

$$f(u)^m = q^m + mq^{m-1}u\varphi(u) + \frac{m(m-1)}{2}q^{m-2}u^2\varphi(u)^2 + \ldots$$
$$+ qu^{m-1}\varphi(u)^{m-1} + u^m\varphi(u)^m;$$

on substituera, en faisant successivement $m = 1, 2, 3, \ldots$, ce développement dans la série (2). De cette substitution, il résulte que, si l'on fait $u = 0$, après les opérations indiquées, tous les termes de la série contiendront q, puisque $f(u)^m$ étant dérivé $m - 1$ fois, le dernier terme $u^m\varphi(u)^m$, seul indépendant de q, sera nul par l'hypothèse $u = 0$. La valeur de x, exprimée par la série en termes réels, étant annulée lorsque $q = 0$, il résulte des principes exposés, que cette série donne la valeur approchée de la plus petite racine de l'équation

$$x^m + ax^{m-1} + \ldots + (p-1)x + q = 0.$$

Remarquons aussi que si la série est convergente, elle exprime nécessairement une racine réelle de la proposée; dans le cas de la convergence, la proposée doit donc avoir au moins une racine réelle. Si la série est divergente, elle correspond à une racine imaginaire, bien que tous ses termes soient réels. On a un exemple très-simple de cela, dans le développement par le binôme d'une racine imaginaire de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0;$$

en effet, on peut donner aux racines la forme

$$-\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1-h},$$

en faisant

$$h = \frac{4q}{p^2},$$

et supposant

$$h > 1.$$

Le développement $(1 - h)^{\frac{1}{2}}$ conduit à une suite divergente, en quantités réelles.

5°. Si l'on considère l'équation

$$(3) \qquad u - x + f(x) = 0,$$

et que dans la série (2) on ne fasse pas $u = 0$, on pourrait demander quelle serait la racine développée. Posons $x = u + y$; l'équation précédente deviendra

$$(4) \qquad y = f(u + y).$$

Au lieu de celle-là, considérons

$$y = \varepsilon + f(u + y),$$

ε étant un paramètre arbitraire; la série de Lagrange, appliquée à cette dernière, donne

$$y = \varepsilon + f(u + \varepsilon) + \tfrac{1}{2}[f(u + \varepsilon)^2]' + \frac{1}{2.3}[f(u + \varepsilon)^3]'' + \ldots.$$

Si l'on pose, après les opérations indiquées, $\varepsilon = 0$, on développera la plus petite racine y de l'équation (4), et son expression sera évidemment

$$y = f(u) + \tfrac{1}{2}[f(u)^2]' + \frac{1}{2.3}[f(u)^3]'' + \ldots,$$

c'est-à-dire, la valeur de $x - u$ qu'aurait fournie la série (2). Si donc on ne fait pas le paramètre u égal à zéro, et qu'on fasse usage de la série de Lagrange, on développera la plus petite valeur numérique de $x - u$, par suite la racine x qui diffère le moins du paramètre u. (Cette

remarque est due à M. le professeur Chio, de Turin; elle se trouve dans un Mémoire non publié, sur lequel M. Cauchy a fait un Rapport (*Comptes rendus de l'Académie*, 1847, p. 492.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE, POUR L'ANNÉE 1849

(voir t. VII, p. 453).

Composition de mathématiques.

Démontrer que si un cône de révolution passe par une ellipse, la somme des arêtes aboutissant aux extrémités d'un même diamètre de cette courbe est constante (*voir* t. Ier, p. 417).

Examiner ce que devient cette proposition, lorsqu'à l'ellipse on substitue une hyperbole ou une parabole.

Sujet de composition en physique.

1°. Thermomètre à poids. Application à la mesure des dilatations des liquides et des solides.

2°. Mesure de l'intensité des courants électriques.

BIOGRAPHIE.

ANNE (PIERRE-LÉON), professeur.

Tous les professeurs de la capitale ont connu ce confrère si poli, si honnête dans son langage, dans ses manières; d'un commerce si agréable, si cordial; d'une obligeance à rendre service, que rien ne pouvait épuiser et qui allait

au-devant des demandes. Des fonctionnaires, disséminés dans tous les services publics, se rappellent le professeur, d'une humeur toujours égale, dont aucun mouvement ne dégénérait en brusquerie; conservant toujours envers les élèves ces égards, ces attentions qui font naître l'affection, la donnent pour base au respect. Léon Anne n'est plus; il appartient à l'éternité. Disons quelques mots de son passé.

Anne (Pierre-Léon) naquit à Rouen le 15 mars 1806. Trois mois après, le père, qui exerçait une profession mercantile, mourut et ne laissa à sa veuve que de faibles ressources et un fils aîné, nommé Théodore, âgé de neuf ans. Ces enfants annonçant de l'intelligence, la mère, pour suivre leur éducation, vint, en 1810, s'établir à Paris. Avec l'abnégation et ce courage qui distinguent les mères, celle-ci employa toutes ses forces, aidée de son aîné, à sustenter la famille. La fortune ne fut pas favorable; usée de fatigue, la pauvre femme succomba en 1815. Deux orphelins restèrent sous l'unique protection de la Providence. Cette protection avait fait entrer M. Théodore Anne, en 1814, dans la secrétairerie du duc d'Angoulême. Ce prince généreux, digne descendant de Louis XIV, fit donner une bourse à Léon, au collége Louis-le-Grand, et se chargea du trousseau. Après avoir travaillé avec ardeur pendant dix ans dans cet établissement, Léon le quitta en 1826 pour entrer à l'École Polytechnique. M. le Dauphin voulait lui procurer une bourse entière; mais, à cette époque, il n'y avait que vingt-quatre bourses que l'on partageait en quarante-huit demi-bourses, pour aider plus d'élèves. M. le Dauphin, ne voulant pas priver un élève du bénéfice de cette disposition, n'alloua à Léon qu'une demi-bourse, et paya l'autre sur sa cassette, ainsi que le trousseau. Léon a dû étudier les mathématiques sérieu-

sement, car il les aimait. Pendant les deux années de séjour à l'École, il n'a eu que quatre jours de retenue pour une lettre royaliste, collectivement écrite, et publiée dans les journaux. Son examen de sortie ne fut pas heureux. Des notes excellentes ne purent en détruire le mauvais effet. Les passions politiques du temps n'eurent-elles aucune influence sur ce résultat?

Ne pouvant entrer comme officier dans l'artillerie, arme qu'il affectionnait, il voulut s'y engager et reconquérir son avancement perdu. Des infirmités l'empêchèrent d'être enrôlé comme soldat, et il se voua alors à l'enseignement libre.

Entré dans cette pénible carrière, il remplit avec une conscience, presque timorée, le devoir essentiel de ce professorat qui consiste à préparer les élèves aux examens et surtout aux examinateurs; à cet effet, il recueillait chaque année toutes les questions principales et les résolvait de la manière la plus simple, à l'usage des élèves. Il s'attachait, de prédilection, aux solutions synthétiques. On en a des exemples dans plusieurs travaux dont Anne a enrichi ce Recueil. C'est à lui que nous devons des centaines de questions d'examen que nous avons données chaque année depuis 1842. Il prémunissait aussi ses élèves contre les mille et une objections, océan sans fond, dont abondent les interrogations. Son mode d'enseignement était remarquable par une extrême clarté et par une patience qui coûte souvent tant à conserver, au milieu de tant de sujets d'impatience. La répétition continuelle, si débilitante, des mêmes travaux, soutenus avec un zèle continu, minèrent une santé chancelante et abrégèrent les jours de l'excellent professeur. Après une maladie assez longue, Anne s'éteignit avec calme le 5 avril dernier, muni des secours du culte catholique qu'il a toujours pratiqué avec la même ferveur que celui de la recon-

naissance envers d'augustes bienfaiteurs. Les élèves perdent un bienveillant guide, la société un digne citoyen, et nous un collaborateur dévoué. C'est lui qui a créé et élaboré ces Tables si détaillées, si méthodiques, qui terminent chaque année, et qui, facilitant les recherches, économisent le temps, capital qu'il faut ménager.

Il avait joint à ses destinées une charmante personne, petite-fille du docteur Amy, médecin du duc d'Angoulême et du duc de Berry. Elle a fait le bonheur de toute sa vie et adouci, par des soins angéliques, l'amertume de ses jours de souffrance. Une tendre amitié, une communauté de sentiments a toujours uni étroitement les deux frères. M. Théodore Anne, ayant quitté l'état militaire lors de l'exil de la branche aînée, a cultivé avec succès diverses branches littéraires, et, occupant un rang honorable dans la carrière dramatique et dans celle du journalisme, il s'est toujours montré homme de talent dans ses écrits, et homme de cœur dans sa conduite et dans ses actions.

Anne laisse trois fils en bas âge. Lisant un jour ces lignes, faible expression d'une profonde reconnaissance, tracée d'une main inhabile, qui alors ne remuera plus, puissent-ils se dire : Notre père a obtenu l'amour et l'estime des gens de bien; conservons ce précieux héritage et transmettons, avec son nom, le souvenir de ses talents et de ses vertus!

NOTE SUR L'ÉLIMINATION,

D'APRÈS M. RICHELOT.

(Journal de M. Crelle, t. XXI, p. 226, 1841; en latin.)

Méthode Sylvester.

1. Soient f_1 et f_2 deux fonctions rationnelles entières en y, savoir :

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1 = a'_m y^m + a'_{m-1} y^{m-1} + \ldots a'_0 = 0, \\ f_2 = a''_n y^n + a''_{n-1} y^{n-1} + \ldots a''_0 = 0. \end{cases}$$

Multiplions l'équation $f_1 = 0$ successivement par y^{n-1}, $y^{n-2}, \ldots, y^0$, et de même, l'équation $f_2 = 0$ par y^{m-1}, $y^{m-2}, \ldots, y^0$; nous obtenons $m+n$ équations *linéaires* relativement aux quantités y^{m+n-1}, $y^{m+n-2}, \ldots, y^0$. Éliminant entre ces $m+n$ équations du premier degré, comme autant d'inconnues, les $m+n-1$ puissances, $y^{m+n-1}, y^{m+n-2}, \ldots, y^1$, on obtient une équation entre les coefficients a', a''. Or, dans toutes ces équations, la quantité entièrement connue est nulle; donc on ne peut en déduire que le rapport entre les inconnues et le *déterminant* est nul. Ce *déterminant* étant représenté par X, on aura $X = 0$ pour l'équation finale, et sans facteurs étrangers, car les coefficients a' n'y dépassent pas le degré n, et les coefficients a'' le degré m; car Euler a démontré que toute fonction entière évanouissante de a' et a'', qui jouit de cette propriété, représente la *véritable* équation finale (*voir* tome VII, page 163).

Observation. Cette belle méthode se trouve dans le

journal *the London and Edinburgh philosophical Magazine and Journal of Science*, 1839 ou 1840 (*).

Méthode d'Euler.

2. Prenons deux fonctions entières π_1 et π_2; la première, de degré $n-1$, renfermant n coefficients *arbitraires*, et la seconde, de degré $m-1$, renfermant m coefficients *arbitraires*. La fonction $\pi_1 f_1 + \pi_2 f_2$ de degré $m+n-1$ contient $m+n$ coefficients arbitraires, et les puissances $y^{m+n-1}, y^{m+n-2},\ldots, y^0$. Soit y^h une quelconque de ces puissances : faisons son coefficient égal à *un*, et les coefficients des $m+n-1$ autres puissances égaux à zéro; nous aurons $m+n$ équations du premier degré qui déterminent les $m+n$ coefficients arbitraires, et l'on a

$$(2) \qquad \pi_1 f_1 + \pi_2 f_2 = y^h.$$

Soit Δ le *déterminant* dans les $m+n$ *équations*, et faisons

$$\pi_1 \Delta = \rho_1^{(h)}, \quad \pi_2 \Delta = \rho_2^{(h)};$$

il est évident que $\rho_1^{(h)}$ et $\rho_2^{(h)}$ sont des fonctions entières de a' et a'', et l'on a

$$(3) \qquad \rho_1^{(h)} f_1 + \rho_2^{(h)} f_2 = \Delta y^h.$$

Or, f_1 et f_2 étant nuls, on a aussi $\Delta = 0$; et comme Δ renferme a' au degré n et a'' au degré m, cette équation est donc l'équation finale et identique avec $X = 0$. Ainsi

$$(4) \qquad \rho_1^{(h)} f_1 + \rho_2^{(h)} f_2 = X y^h.$$

(*) Méthode si facile, que son absence dans l'enseignement est un fait ni expliqué ni explicable. MM. Choquet et Serret n'en parlent point.



3. Soit a'_π un quelconque des coefficients de f_1, et prenant la dérivée de l'équation (4) par rapport à a'_π, faisons ensuite

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0;$$

il vient

$$y^h \left(\frac{dX}{da'_\pi}\right) = \rho_1^h \left(\frac{df_1}{da'_\pi}\right) = \rho_1^h y^\pi,$$

d'où

$$y^{h-\pi}\left(\frac{dX}{da'_\pi}\right) = \rho_1^h, \tag{5}$$

et, de la même manière,

$$y^{h-\pi}\left(\frac{dX}{da''_\pi}\right) = \rho_2^h, \tag{6}$$

où π est un des nombres $0, 1, 2, \ldots, n$. Faisons $h = \pi$, on obtient

$$\rho_1^{(h)} = \frac{dX}{da'_h}, \qquad \rho_2^{(h)} = \frac{dX}{da''_h}. \tag{7}$$

Dans la première équation, h ne doit pas dépasser m, et dans la seconde, h ne doit pas dépasser n.

Observation. L'auteur tire des équations (7), combinées avec les équations (5) et (6), des équations désignées par (8), (9), (10), et analogues à celles qui ont été trouvées par M. Jacobi (*voir* tome VII, page 158).

Deux équations à deux inconnues.

4. Supposons que les coefficients a', a'', dans les fonctions f_1, f_2 ci-dessus, soient des fonctions de x, et ordonnant par rapport à x, l'on ait

$$\begin{cases} f_1 = b'_p x^p + b'_{p-1} x^{p-1} + \ldots + b'_0 = 0, \\ f_2 = b''_q x^q + b''_{q-1} x^{q-1} + \ldots + b''_0 = 0, \end{cases} \tag{11}$$

où b', b'' désignent des fonctions entières de y.

Soit l'équation finale $Y = 0$.

Si nous représentons par $\sigma_1^{(h)}$, $\sigma_2^{(h)}$, les fonctions entières les plus simples de b' et b'' analogues aux fonctions ρ, on aura, comme ci-dessus (3),

$$\sigma_1^{(h)} f_1 + \sigma_2^{(h)} f_2 = \dot{Y} x^h, \tag{12}$$

et

$$(13) \begin{cases} x^{h-\lambda}\left(\dfrac{dY}{db'_\lambda}\right) = \sigma_1^{(h)}, \text{ analogue à l'équation (5)}, \\ x^{h-\lambda}\left(\dfrac{dY}{db''_\lambda}\right) = \sigma_2^{(h)}, \text{ analogue à l'équation (6)}. \end{cases}$$

5. Les équations $X = 0$, $Y = 0$, sont, comme on sait, de même degré. Il s'agit de trouver le caractère de *correspondance* des racines.

L'équation (5) donne

$$y^{h-\pi+1}\left(\frac{dX}{da'_{\pi-1}}\right) = \rho_1^h;$$

d'où

$$y = \frac{\dfrac{dX}{da'_\pi}}{\dfrac{dX}{da'_{\pi-1}}},$$

et, de même,

$$y = \frac{\dfrac{dX}{da''_\pi}}{\dfrac{dX}{da''_{\pi-1}}};$$

π, dans la première valeur de y, est un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, m$; et, dans la seconde valeur, un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, n$. Mettant dans le

second membre une valeur de x, tirée de l'équation $X = 0$, le premier membre donne la valeur correspondante de y, déduite de l'équation $Y = 0$.

Observation. M. Liouville a trouvé depuis (en 1847) une autre méthode pour établir la relation entre les valeurs correspondantes, mais exigeant une nouvelle élimination, tandis que la méthode de M. Richelot ne porte que sur l'équation *finale* seulement (*voir* t. VI, p. 295).

Le reste du Mémoire contient un théorème analogue à celui que donne M. Jacobi (*voir* t. VII, p. 122 et 123), et on l'obtient par les mêmes moyens.

BIBLIOGRAPHIE (*).

Solutions raisonnées des exercices proposés dans le traité d'arithmétique de M. *Joseph Bertrand,* maître de conférences à l'École Normale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique; par MM. *Gros* et *Prouhet*, professeurs de mathématiques. Paris, 1850; in-8° de 96 pages.

Ces exercices ont acquis chez les élèves une réputation de difficultés comme naguère les *questions* de M. Comte. Le présent ouvrage fait disparaître toutes les aspérités, et l'esprit peut désormais parcourir cette arithmétique sans la moindre fatigue. Bonne fortune pour les paresseux surtout, mais aussi pour les travailleurs; ceux-ci ne feront que consulter le livre, et, comparant leurs propres raison-

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

nements à ceux des auteurs, ils pourront apprendre comment on peut réunir à la fois clarté et rigueur.

On n'a pas indiqué les pages de l'ouvrage où se trouvent les questions; cela aurait évité des recherches inutiles.

Nous rappellerons que M. Prouhet a proposé, en 1844, une belle question d'arithmétique qui n'est pas encore résolue (*voir* tome III, page 376; question 87). Nous recueillerons avec reconnaissance la solution que l'auteur voudra bien nous communiquer, ainsi que des questions 88 et 89 qui lui appartiennent également.

SOLUTION DE LA QUESTION 226

(voir t. IX, p. 181);

PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Élève de l'institution Sainte-Barbe.

THÉORÈME. *Soit une circonférence,* A *le centre,* CAB *un diamètre. Sur* CB *prolongé, prenez un point* D *tel que l'on ait* $DB.\overline{DC}^2 = AD.\overline{AB}^2$ (*et non* $AB.\overline{AD}^2$). *Du point* D *comme centre, et d'un rayon* AB, *décrivez une circonférence coupant en* E *la circonférence donnée. L'arc* BE *est la septième partie de la circonférence.*

(VIÈTE.)

Démonstration. On a, par hypothèse, la relation

$$DB.\overline{DC}^2 = AD.\overline{AB}^2.$$

Soient

$$AD = 2l,$$

$$AB = R = 1;$$

la relation devient

$$(2l-1)(2l+1)^2=2l,$$

ou

$$8l^3+4l^2-4l-1=0.$$

C'est l'équation qui donne les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{7}$ (*voir* tome IX, page 52).

Donc, si l'on prend le milieu M de la ligne AD, on a

$$AM=\cos\frac{2\pi}{7}.$$

Or, si l'on élève la perpendiculaire ME, il est clair que DE est égal au rayon du cercle ; donc BE est bien le septième de la circonférence.

COMPLÉMENT DE L'ARTICLE SUR LA MEILLEURE FORME A DONNER AUX TRIANGLES DANS LES LEVERS

(voir t. IX, p. 197);

PAR M. PIOBERT.

On a vu, page 200, que le rapport du déplacement du sommet à la hauteur du triangle, ou ce qu'on appelle la déformation du triangle, est

$$\frac{D}{c\sin A}=\frac{1}{\sin B}\sqrt{\frac{\sin^2 dA}{\sin^2 A}+\frac{\sin^2 dC}{\sin^2 C}+\frac{2\sin dA\sin dC\cos B}{\sin A\sin C}}.$$

Il est facile de voir que les plus grandes déformations, soit dans le sens de la hauteur, soit latéralement, auront lieu lorsque dA et dC seront égaux à la plus grande erreur à craindre dans la mesure de chaque angle, dA et dC étant de même signe dans le premier cas et de



signes différents dans le dernier. On aura donc

$$\frac{D}{c \sin A} = \frac{\sin dA \sqrt{\sin^2 A + \sin^2 C \pm 2 \sin A \sin C \cos B}}{\sin A \sin B \sin C},$$

le signe + pour des erreurs de même signe et le signe — pour des erreurs de signes différents.

Il est également facile de s'assurer que les écarts en hauteur, qui sont les plus considérables et les plus à craindre, seront les plus petits pour $A = C$; il vient alors

$$\frac{D}{c \sin A} = \frac{\sin dA}{\sin A \sin B} \sqrt{2 \pm 2 \cos B}.$$

Comme ε est la plus grande erreur possible sur la mesure de chaque angle, le plus grand écartement latéral du sommet B de sa véritable position sera donné par

$$dA = - dC = \varepsilon;$$

et la déformation sera

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin A \sin B} \sqrt{2 - 2 \cos B}.$$

Si deux angles seulement ont été mesurés, on aura également

$$dA = dC = \varepsilon$$

pour le cas du plus grand écart en hauteur, et la déformation sera

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin A \sin B} \sqrt{2 + 2 \cos B}.$$

La moyenne des plus grandes déformations sera

$$\frac{\sin \varepsilon}{2 \sin A \sin B} \left(\sqrt{2 - 2 \cos B} + \sqrt{2 + 2 \cos B}\right),$$

dont il faudra chercher le minimum pour avoir la condition du triangle le plus favorable, ou qui donne les chances des moins grandes erreurs sur la position du sommet à

déterminer. Comme $\cos B$ est toujours dans la pratique sensiblement plus petit que l'unité, la somme des deux radicaux ne varie pas beaucoup dans les limites des valeurs qu'on donne à B, de sorte qu'on peut avoir une première approximation en ne considérant que les variations du dénominateur; on a ainsi cherché précédemment (page 200) le minimum de $\frac{1}{\sin A \sin B}$, et l'on a trouvé pour condition

$$\operatorname{tang}^2 A = 2,$$

c'est-à-dire, A et C d'environ 55°, et B de 70°.

En faisant la recherche du minimum de la valeur entière de la déformation, on trouve la condition

$$\operatorname{tang}^3 A - \operatorname{tang} A = 2,$$

d'où

$$A = C = 56^\circ 41' \quad \text{et} \quad B = 66^\circ 38',$$

au lieu des valeurs précédentes.

Lorsque les trois angles du triangle sont mesurés, dA et dC de même signe ne peuvent être égaux à ε; car autrement dB serait égal à 2ε, comme cela a déjà été dit (page 198); on ne peut alors avoir de plus grande valeur de dA et de dC que $\frac{\varepsilon}{2}$, et la plus grande déformation en hauteur devient

$$\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin A \sin B} \sqrt{2 + 2\cos B}.$$

La moyenne des plus grandes déformations est alors, en remarquant que ε est toujours très-petit,

$$\frac{\sin \varepsilon}{2 \sin A \sin B} \left(\sqrt{2 - 2\cos B} + \tfrac{1}{2} \sqrt{2 + 2\cos B}\right);$$

en cherchant la condition du minimum, on trouve alors

$$\operatorname{tang}^3 A - \operatorname{tang} A = 4,$$

d'où

$$A = C = 60^\circ 54' \quad \text{et} \quad B = 58^\circ 12'.$$

Il est à remarquer que dans les diverses solutions qui précèdent, les écarts latéraux et en hauteur sont inégaux; dans le cas de deux angles mesurés, c'est l'écart en hauteur qui est le plus grand, et dans le cas des trois angles mesurés, c'est l'écart latéral. Comme, en général, il est indifférent que la déformation soit dans un sens ou dans un autre, la solution la plus avantageuse est celle où la plus grande de ces déformations est la moindre possible. Elles doivent alors être égales dans les deux sens, et il arrive qu'elles ne sont pas sensiblement plus grandes que les moyennes trouvées dans les autres solutions. Dans le cas de deux angles mesurés, on a

$$\sqrt{2 + 2\cos B} = \sqrt{2 - 2\cos B},$$

ou

$$B = 90^\circ, \quad C = A = 45^\circ.$$

Dans le cas des trois angles mesurés, on a

$$\sqrt{2 + 2\cos B} = 2\sqrt{2 - 2\cos B},$$

ou

$$1 + \cos B = 4(1 - \cos B),$$

d'où

$$\cos B = \tfrac{3}{5}, \quad B = 53^\circ 7' 49'' \quad \text{et} \quad A = C = 63^\circ 26' 5'',5.$$

NOTE HISTORIQUE SUR VIÈTE (FRANÇOIS).

Les Grecs distinguaient deux sortes de questions géométriques, les diorismes (διορισμοί) ou problèmes déterminés, et les lieux indéterminés (τόποι) (*voir* tome III, page 480). Viète, un des premiers, a appliqué l'algèbre aux diorismes, puis Descartes le premier aux lieux plans; et ces deux

applications ont fait faire à la géométrie plus de progrès en trois siècles qu'elle n'en avait fait auparavant en trois mille ans. C'est que Viète a eu aussi le premier l'idée mère de représenter par des lettres même les quantités numériquement connues. De là, il fut naturellement amené à représenter aussi les longueurs linéaires par des lettres et à donner ce qu'on nomme aujourd'hui la *construction* géométrique des formules; car la vraie formule algébrique ne date que de Viète. L'analyse ne consistant qu'en *formes,* il a désigné cette science sous le nom de logistique *spécieuse*. Ce grand homme, de qui nous tenons tout, n'a pas encore de monument dans sa ville natale. Il vit le jour, en 1540, à Fontenay-le-Comte, dans le bas Poitou, aujourd'hui département de la Vendée. Jouissant de l'indépendance que donne la fortune, il passa toute sa vie à cultiver les mathématiques avec une telle ardeur, qu'il passait quelquefois des jours et des nuits, assis sur sa chaise, à la recherche d'une solution. Il ne faisait imprimer ses ouvrages qu'à un petit nombre d'exemplaires, qu'il distribuait à des amis, sans jamais vouloir en tirer un profit quelconque. Il était lié avec les principaux personnages du temps, entre autres avec le célèbre historien de Thou. Étant maître des requêtes, il venait souvent à Paris, où il est mort en 1603. Ses ouvrages, devenus très-rares, ont été recueillis par le célèbre François de Schooten, en 1646, sous ce titre : *Francisci Vietæ Opera mathematica in unum volumen congesta ac recognita, operâ atque studio Francisci a Schooten Leydensis, matheseos professoris. Lugduni-Batavorum, ex officinâ Bonaventuræ et Abrahami Elzeviriorum*. In-folio de 554 pages.

Profond helléniste, selon le mauvais goût du temps il entremêle le discours latin de beaucoup d'expressions grecques; ce qui donne au style un aspect hybride. Voici le contenu de ce volume.

1°. *Isagoge in artem analyticam;* il divise l'analyse en trois parties : la *zététique,* la *poristique* et l'*exégétique.*

Dans la zététique, on se propose de rechercher les relations qui existent entre les inconnues et les connues; autrement, la formation des équations. La poristique a pour objet les moyens de démontrer les théorèmes, et l'exégétique s'occupe de la recherche des grandeurs des inconnues, *autrement* de la résolution des équations. Les deux premières méthodes sont énoncées par Théon, et la troisième est de Viète. Au chapitre IV, on lit cette célèbre déduction : *Logistice numerosa est quæ per numeros, speciosa quæ per species seu rerum formas exhibetur, ut pote per alphabetica elementa.*

2°. *Ad logisticen speciosam notæ priores;* contient les quatre opérations algébriques et les élévations aux puissances, et diverses questions sur le triangle rectangle.

3°. *Zeteticorum libri quinque;* divers problèmes numériques et géométriques sur le théorème de Pythagore, sur des moyennes proportionnelles, etc.

4°. *De æquationum recognitione et emendatione tractatus duo;* traite de la manière de préparer les équations, par le passage de termes d'un membre dans un autre, par la disparition des dénominateurs, des radicaux, etc.

5°. *De numerosâ potestatum purarum resolutione;* extraction des racines des nombres.

6°. *De numerosâ potestatum adfectarum resolutione;* résolutions des équations du second, du troisième et du quatrième degré, et des équations supérieures réductibles à l'un de ces trois degrés. Voici comment il résout l'équation du troisième degré. Soit

$$x^3 + 3b^2x = 2c^3;$$

faisant

$$x = \frac{y^2 - b}{y},$$

on obtient

$$y^6 - 2c^3y^3 = b^6;$$

d'où, etc.

7°. *Effectionum geometricarum canonica recensio.*

8°. *Supplementum geometriæ; pseudo-mesolabum et alia quædam adjuncta capitula;* problèmes sur des moyennes proportionnelles continues dans le cercle : on trouve (page 255) le problème sur l'inscription de la corde de l'heptagone, résolu ci-dessus.

Construire un quadrilatère inscriptible dont les côtés sont donnés, etc.

9°. *Theoremata ad sectiones angulares;* première théorie des sections angulaires.

10°. *Responsum ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus;* il s'agit de trouver la racine d'une certaine équation du quarante-cinquième degré. Charmé de la solution, Adrien a fait exprès le voyage de Wurtzbourg à Paris, et de là à Poitiers, pour faire la connaissance de Viète, et celui-ci lui a dédié l'ouvrage suivant. Viète reconnut tout de suite qu'il s'agit de diviser un arc donné en quarante-cinq parties égales.

11°. *Apollonius Gallus;* première solution géométrique du problème où l'on cherche à construire un cercle qui en touche trois autres : sa méthode est, au fond, celle qu'on appelle aujourd'hui celle des *axes radicaux* et des *centres d'homologie*. Viète résout d'abord des cas particuliers de contact.

12°. *Munimen adversus nova cyclometrica;* réfutation de la cyclométrie de Scaliger.

Le reste du volume contient les travaux de Viète sur le calendrier grégorien, et dans lequel il a signalé des défauts et indiqué des corrections qui n'ont pas été adoptées et lui ont occasionné des désagréments. Il s'était rendu à

Lyon pour présenter son travail au cardinal Aldobrandini, légat du Pape; de Thou, consulté, avait déconseillé ce voyage et avait prédit d'avance à Viète son insuccès auprès de ces hommes, *qui ulla in re errasse, aut errare posse, ne fateantur, pro imperii arcano ducunt* (Historia, lib. CXXIX).

Ceux qui voudront plus de détails sur les travaux de Viète, pourront recourir à l'excellente Note de M. Chasles *sur la nature des opérations algébriques dont la connaissance a été attribuée à Fibonacci; des droits de Viète méconnus* (Comptes rendus, 1841, 1er semestre, p. 741). On y lit qu'Adrien Romanus a déjà eu l'*idée* d'une représentation *littérale* de toute quantité; mais que Viète a réalisé cette idée. Romanus, né à Louvain, est mort à Wurtzbourg, le 4 mai 1615; il était médecin de l'Empereur: son nom de famille est Van Roemer. Une Notice intéressante sur ce géomètre a été donnée par M. de Reiffenberg (Quetelet, *Correspondance mathématique*, t. VIII, p. 323; *voir* aussi Tallemant des Réaux, *Historiettes*, tome II, page 88).

SECOND THÉORÈME DE MINIMUM POUR UN SYSTÈME DE DROITES DANS L'ESPACE

(voir t. VII, p. 407 et 484);

PAR MM. P. HOSSARD ET POUDRA,
Chefs d'escadron d'état-major.

THÉORÈME. *Un nombre quelconque de droites étant données dans l'espace, le point pour lequel la somme des carrés des perpendiculaires abaissées sur ces droites*

est un minimum, est en même temps le centre de gravité des pieds de ces perpendiculaires; et réciproquement.

Démonstration. Soient A ce point, et G le centre de gravité des pieds des perpendiculaires. Quel que soit le point A, la somme des carrés des distances entre le point G et les pieds des perpendiculaires sera un minimum. Par suite, la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du point A serait plus grande que celle des carrés des distances prises à partir du centre de gravité G, et, à fortiori, plus grande que la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du centre de gravité G sur les droites; le point A ne jouira donc de la propriété énoncée qu'autant qu'il se confondra avec le point G.

Or, on sait qu'il n'existe qu'un seul centre de moyenne distance. Donc le point G, centre de gravité des pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les droites, est unique; et, partant, la somme des carrés de ces perpendiculaires est un minimum relativement à toute somme semblable pour d'autres points de l'espace.

Nous employons ce théorème dans la solution d'une question pratique de géodésie que nous donnerons prochainement.

Note. Le carré de la distance d'un point dans l'espace à une droite dans l'espace, est une fonction rationnelle entière du second ordre des coordonnées du point et de celles du pied de la perpendiculaire; il s'ensuit qu'on peut appliquer à des droites dans l'espace le même genre de démonstration qu'on a donné pour des droites dans un plan (*voir* tome VII, page 408).

PROGRAMME D'UN COURS DE MÉCANIQUE ÉLEMENTAIRE.

FIN DU DEUXIÈME ARTICLE (voir page 169 de ce volume);

PAR M. C.-E. PAGE.

Prenons d'abord pour exemple un système entièrement libre. Nous avons vu que tous les mouvements possibles d'un pareil système se réduisent à un mouvement de translation suivant une direction quelconque, et à un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque.

Commençons par supposer un mouvement de translation suivant une direction quelconque. Les vitesses virtuelles de tous les points d'application sont représentées par des droites parallèles et égales entre elles : en égalant à zéro la somme des produits de toutes ces vitesses virtuelles par les projections des forces sur leur direction, on a un facteur commun à tous les termes; en le supprimant, il reste la somme des projections des forces égale à zéro.

Pour les forces appliquées à un système entièrement libre, on a donc cette première condition d'équilibre : il faut que la somme des projections des forces sur une direction quelconque soit nulle.

Pour que la somme des projections sur une direction quelconque soit nulle, il faut que les sommes des projections sur trois axes rectangulaires fixes soient nulles séparément; cette première condition se trouve donc exprimée au moyen de trois équations.

Maintenant, supposons un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque. La vitesse virtuelle d'un point d'application est égale au produit de la vitesse angulaire par le rayon de ce point, et le travail élémentaire virtuel

de la force correspondante est égal au produit de cette vitesse virtuelle par la projection de la force sur une droite perpendiculaire à la fois au rayon et à l'axe : en égalant à zéro la somme des travaux élémentaires virtuels, on voit que la vitesse angulaire entre comme facteur commun à tous les termes ; en supprimant ce facteur, il reste la somme des produits qu'on obtient en multipliant le rayon de chaque point par la projection de la force correspondante sur une droite perpendiculaire au rayon et à l'axe. Ce produit est égal au produit de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe par la plus courte distance de la force à l'axe. C'est ce dernier produit qu'on appelle *moment de la force* par rapport à l'axe.

On a donc cette seconde condition d'équilibre : il faut que *la somme des moments des forces* par rapport à un axe quelconque soit nulle.

Nous avons vu que la vitesse angulaire, autour d'un axe quelconque, peut toujours se décomposer en trois vitesses angulaires autour de trois axes rectangulaires fixes ; il est facile d'en conclure : pour que la somme des moments des forces par rapport à un axe quelconque soit nulle, il faut que les sommes des moments des forces par rapport à trois axes rectangulaires fixes soient nulles séparément ; ce qui donne encore trois équations.

Pour l'équilibre des forces appliquées à un système entièrement libre, nous avons donc deux conditions générales qui s'expriment chacune au moyen de trois équations.

Le nombre des équations diminue lorsque les forces sont assujetties à quelques conditions données. Ainsi, par exemple, si les forces sont situées dans un même plan, il suffit, pour l'équilibre, que la somme des projections des forces sur une droite quelconque située dans ce plan

soit nulle, et que la somme des moments des forces par rapport à un axe quelconque perpendiculaire au plan soit nulle; ce qui donne en tout trois équations seulement.

Si les forces sont parallèles entre elles, il suffit, pour l'équilibre, que la somme de ces forces soit nulle, et que la somme de leurs moments par rapport à un axe quelconque perpendiculaire à leur direction soit également nulle; ce qui fournit encore trois équations seulement.

Des conditions d'équilibre des forces parallèles, il est facile de déduire la théorie du centre des forces parallèles, et, par suite, la théorie du centre de gravité, qui est le même que le centre des moyennes distances.

Lorsque le système auquel les forces sont appliquées est gêné dans ses mouvements, les conditions d'équilibre sont restreintes aux seuls mouvements possibles; ce qui diminue le nombre des équations.

Ainsi, par exemple, si un corps est assujetti à n'avoir qu'un mouvement de translation, suivant une seule direction, les vitesses virtuelles de tous les points d'application sont égales entre elles et parallèles à cette direction; d'où l'on conclut que pour l'équilibre il suffit que la somme des projections des forces sur cette direction soit nulle.

Si un corps est assujetti à tourner autour d'un axe fixe, il suffit que la somme des moments des forces par rapport à cet axe soit nulle, etc.

Nous avons déjà vu que les machines sont des corps ou des assemblages de corps gênés dans leurs mouvements. Pour trouver les conditions d'équilibre des forces qui leur sont appliquées, il suffit de déterminer les vitesses virtuelles des points d'application, et d'égaler à zéro la somme des travaux élémentaires virtuels.

En général, dans une machine, il n'y a qu'un seul

mouvement possible, et les forces sont ordinairement dirigées dans le sens même des vitesses virtuelles de leurs points d'application. Dans ce cas, si une machine n'est sollicitée que par deux forces qui tendent à la faire mouvoir en sens contraires, pour qu'il y ait équilibre, il faut que ces forces soient en raison inverse des vitesses virtuelles de leurs points d'application.

SOLUTION DE LA QUESTION 227

(voir t. IX, p. 151);

PAR MM. L. DURAND CLAYE, élève (institution Sainte-Barbe);
F. MARTOREY, élève du lycée Charlemagne (division de M. Catalan).

1. *Lemme*. Dans un triangle, connaissant, de *direction*, la hauteur, la bissectrice, la médiane, qui partent d'un même sommet, le triangle est donné d'*espèce*. On peut en construire géométriquement les trois angles.

2. PROBLÈME 227. *Dans une conique à centre, on donne : 1° une directrice ; 2° une tangente avec le point de contact ; 3° la direction du diamètre qui passe par ce point : construire la conique.*

Première solution. Soient M le point de contact donné et P le point où la tangente en M coupe la directrice, et F et F′ les deux foyers inconnus. Dans le triangle FMF′, on connaît les directions de la bissectrice (c'est la normale en M), de la médiane (c'est le diamètre), et de la hauteur passant par M; donc, d'après le lemme, l'angle FMF′ est connu ainsi que sa moitié. Les rayons MF, MF′ sont donc connus en direction. Mais, d'après une propriété connue, le foyer correspondant à la directrice donnée est sur la circonférence décrite sur MP comme diamètre; donc le foyer cherché est à l'intersection de ce cercle avec chacune

des directions MF et MF'. Il y a donc deux coniques qui satisfont à la question. (Claye.)

3. *Seconde solution. Lemmes.* 1°. Les droites qui joignent un foyer au point de contact d'une tangente et au point de rencontre de cette tangente avec la directrice correspondante, sont perpendiculaires.

2°. La polaire de tout point pris sur la directrice passe par le foyer, et la droite qui joint ce point au foyer est perpendiculaire sur la polaire.

3°. La polaire d'un point est parallèle au diamètre conjugué du diamètre qui passe par ce point.

Soient M le point de contact, T le point où la tangente coupe la directrice, R le point où le diamètre coupe la directrice. Le foyer F correspondant à la directrice est : 1° sur la circonférence décrite sur MT comme diamètre (lemme 1); 2° sur la perpendiculaire abaissée de R sur la tangente MT (lemmes 2 et 3); donc le point cherché est à l'intersection d'un cercle et d'une droite. Il y a donc deux solutions qui peuvent se réduire à une seule ou même devenir imaginaires. Lorsque le triangle formé par la tangente, la directrice et le diamètre a deux angles aigus adjacents à la tangente, le problème est toujours possible. (Martorey.)

LIEU GÉOMÉTRIQUE RELATIF AUX FOYERS DES CONIQUES

(voir t. IV, p. 325, 326, 327 et 401);

Par M. MARTOREY,
Élève du lycée Charlemagne (division de M. Catalan).

Problème. *Trouver l'équation du lieu des foyers de toutes les courbes du second degré qui touchent en deux points donnés les deux côtés d'un angle donné.*

Que devient ce lieu lorsque les deux points de contact sont également éloignés du sommet de l'angle?

1. Soit F le foyer d'une courbe du second degré, tangente en A et en B aux droites OA et OB.

Joignons ce foyer au point O, où concourent les tangentes, et aux points de contact A et B: la droite FO est la bissectrice de l'angle AFB.

Il résulte de là que le lieu proposé peut être défini comme celui des points tels, qu'en les joignant à trois points donnés, la droite intermédiaire soit la bissectrice de l'angle des deux autres droites.

Prenons pour pôle le point O et pour axe polaire la tangente OB. Soient a, b les distances OB, OA; θ l'angle des tangentes; ρ et ω les coordonnées d'un point du lieu.

Le triangle OFB fournit la relation

$$\frac{\sin \mathrm{OFB}}{\sin(\mathrm{OFB}+\omega)}=\frac{a}{\rho};$$

d'où

$$\rho \sin \mathrm{OFB} = a(\sin \mathrm{OFB}\cos\omega + \cos \mathrm{OFB}\sin\omega),$$

et, en divisant par cos OFB,

$$\rho\,\mathrm{tang}\,\mathrm{OFB} = a\cos\omega\,\mathrm{tang}\,\mathrm{OFB} + a\sin\omega.$$

De là,

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{OFB}=\frac{a\sin\omega}{\rho-a\cos\omega}.$$

Le triangle AFO fournit de la même manière la tangente de l'angle OFA. On en obtient la valeur immédiatement en changeant dans l'expression précédente a en b, ω en $(\theta-\omega)$; on a ainsi

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{OFA}=\frac{b\sin(\theta-\omega)}{\rho-b\cos(\theta-\omega)}.$$

Les deux angles AFO et OFB étant égaux, leurs tan-

gentes sont égales, et réciproquement, puisque les angles que nous considérons sont inférieurs à deux droits; l'équation du lieu est donc

$$\frac{a \sin \omega}{\rho - a \cos \omega} = \frac{b \sin(\theta - \omega)}{\rho - b \cos(\theta - \omega)},$$

ou

$$\rho = \frac{ab \sin(2\omega - \theta)}{a \sin \omega - b \sin(\theta - \omega)}.$$

2. Avant de construire cette équation dans le cas général, examinons ce que devient le lieu lorsque $a = b$. L'équation se réduit à

$$\rho = \frac{a \sin(2\omega - \theta)}{\sin \omega - \sin(\theta - \omega)} = \frac{2a \sin \frac{2\omega - \theta}{2} \cos \frac{2\omega - \theta}{2}}{2 \sin \frac{2\omega - \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}.$$

Elle se décompose en

(1) $$\sin \frac{2\omega - \theta}{2} = 0,$$

(2) $$\rho = \frac{a \cos\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right)}{\cos \frac{\theta}{2}}.$$

La première équation donne

$$\omega = \frac{2}{\theta}, \quad \omega = 180 + \frac{\theta}{2},$$

c'est-à-dire qu'elle représente la bissectrice de l'angle des tangentes.

En prenant pour unité la longueur $\dfrac{a}{\cos \frac{\theta}{2}}$, on réduit la seconde équation à

$$\rho = \cos\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right),$$

et, en faisant tourner l'axe polaire de l'angle $\frac{\theta}{2}$, on a à construire la formule

$$\rho = \cos\omega,$$

laquelle représente une circonférence. Cette circonférence passe par le point O, et par les points A et B.

Par conséquent, le lieu se compose de la bissectrice de l'angle des tangentes, et de la circonférence qui passe par les deux points donnés et par le point de concours des tangentes.

3. Actuellement construisons la courbe dans le cas général.

Les valeurs de ω qui rendront nul le rayon vecteur sont fournies par l'équation

$$\sin(2\omega - \theta) = 0.$$

De cette équation on tire

$$\omega = \frac{\theta}{2}, \quad \omega = 90 + \frac{\theta}{2}, \quad \omega = 180 + \frac{\theta}{2}, \quad \omega = 270 + \frac{\theta}{2}.$$

Les directions correspondantes des rayons vecteurs, c'est-à-dire les bissectrices de l'angle des tangentes, seront des tangentes à l'origine. Car chacune de ces directions peut être considérée comme la limite des positions d'une sécante de la courbe, tournant autour de l'un des points d'intersection, jusqu'à ce que deux points d'intersection se confondent en un seul.

Les valeurs de ω qui rendront le rayon vecteur infiniment grand sont données par l'équation

$$a \sin\omega - b \sin(\theta - \omega) = 0;$$

d'où

$$\frac{\sin\omega}{\sin(\theta - \omega)} = \frac{b}{a}.$$

La direction indiquée par cette équation est celle de la seconde diagonale du parallélogramme construit avec les distances a et b pour côtés adjacents. On reconnaît facilement que la courbe a une asymptote parallèle à cette diagonale.

La courbe passe par les points de contact, présente un nœud à l'origine, point pour lequel les tangentes à la courbe sont les bissectrices de l'angle des tangentes.

En appliquant la règle pour trouver la tangente en un point quelconque de la courbe, on trouve

$$\tang V = \frac{\sin(2\omega - \theta)[a \sin\omega - b \sin(\theta - \omega)]}{2\cos(2\omega - \theta)[a \sin\omega - b \sin(\theta - \omega)] - \sin(2\omega - \theta)[a \cos\omega + b \cos(\theta - \omega)]}.$$

Si l'on fait $\omega = \theta$, c'est-à-dire si l'on cherche la tangente au point A, l'équation se réduit à

$$\tang V = \frac{a \sin\theta}{a \cos\theta - b}.$$

Or, si nous abaissons la perpendiculaire BP sur OA,

$$BP = a \sin\theta, \quad OP = a \cos\theta;$$

donc

$$\tang V = \frac{BP}{AP}, \qquad V = PAB.$$

De la même manière, pour $\omega = 0$, on a

$$\tang V = \frac{b \sin\theta}{a - b \cos\theta},$$

et l'on reconnaît que

$$V = ABO.$$

Donc les tangentes à la courbe aux points A et B font avec les rayons vecteurs des angles égaux aux angles que la droite AB fait avec ces rayons vecteurs. Ceci pouvait se voir à priori.

4. Pour trouver le degré de la courbe, nous passerons,

par une transformation de coordonnées, aux axes rectangulaires. A cet effet, nous posons,

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega,$$

en prenant pour axe des abscisses l'axe polaire, et pour axe des coordonnées une perpendiculaire à l'axe polaire élevée par l'origine.

L'équation développée donne

$$a\rho \sin \omega - b\rho (\sin \theta \cos \omega - \sin \omega \cos \theta)$$
$$= ab (\sin 2\omega \cos \theta - \cos 2\omega \sin \theta);$$

d'ailleurs

$$\sin 2\omega = \frac{2xy}{\rho^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \qquad \cos 2\omega = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};$$

on a donc, pour équation transformée,

$$[ay - b(x \sin \theta - y \cos \theta)](x^2 + y^2)$$
$$= ab[2xy \cos \theta - (x^2 - y^2) \sin \theta].$$

Ainsi le lieu est une courbe du troisième degré.

SECONDE SOLUTION DU MÊME PROBLÈME.

1. Une considération ingénieuse a ramené la recherche du précédent lieu géométrique à une question de tétragonométrie; mais on peut aussi trouver le lieu directement de la manière suivante :

La bissectrice de l'angle AOB est évidemment le *lieu des centres*. Prenons cette bissectrice pour axe des x, et la droite AB, polaire du point O, pour axe des y; le milieu I de AB est donc l'origine des coordonnées.

Soient $OI = l$; $AI = BI = y'$; l et y' sont des quantités connues. L'équation de la conique a évidemment la

forme suivante :

$$y^2 + C x^2 + E x - y'^2 = 0.$$

On a

$$2yy' + Ex - 2y'^2 = 0, \quad \text{polaire du point O},$$

d'où

$$E = \frac{2y'^2}{l}.$$

On a

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC) = \frac{4y'^2}{l^2}(y'^2 + Cl^2),$$

$$m = B^2 - 4AC = -4C,$$

$$X = \frac{k}{m} = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = -\frac{E}{2C} = -\frac{y'^2}{Cl} = \text{abscis du centre.}$$

Si la courbe est rapportée au centre, α, β étant les coordonnées du foyer, on a

$$\left.\begin{aligned} \beta^2\cos\gamma + \alpha\beta &= \frac{4CL}{m^2}\cos\gamma \\ \alpha^2\cos\gamma + \alpha\beta &= \frac{4L}{m^2}\cos\gamma \end{aligned}\right\} (\textit{voir} \text{ tome II, page 429});$$

mais l'origine n'étant pas au centre, mais en I, il faut remplacer α par $\alpha + X$ ou par $\alpha - \frac{y'^2}{Cl}$, et l'on obtient

$$\beta^2\cos\gamma + \alpha\beta - \frac{\beta y'^2}{Cl} = \frac{4CL}{m^2}\cos\gamma = \frac{y'^2(y'^2 + Cl^2)}{Cl^2}\cos\gamma,$$

$$\left(\alpha - \frac{y'^2}{Cl}\right)^2\cos\gamma + \alpha\beta - \frac{\beta y'^2}{Cl} = \frac{4L}{m^2}\cos\gamma = \frac{y'^2(y'^2 + Cl^2)}{C^2l^2}\cos\gamma.$$

La première équation donne

$$C = \frac{y'^2(y'^2\cos\gamma + l\beta)}{l^2[\cos\gamma(\beta^2 - y'^2) + \alpha\beta]};$$

la deuxième donne

$$C = \frac{y'^2(\beta + 2\alpha\cos\gamma + l\cos\gamma)}{l\alpha(\beta + \alpha\cos\gamma)}.$$

Égalant les deux valeurs de C, on obtient

$$\alpha(\beta l + y'^2\cos\gamma)(\beta + \alpha\cos\gamma)$$
$$= l(\beta + 2\alpha\cos\gamma + l\cos\gamma)(\beta^2\cos\gamma + \alpha\beta - y'^2\cos\gamma),$$

équation du troisième degré.

2. Faisant $\alpha = 0$, on trouve

$$\beta = \pm y' \quad \text{et} \quad \beta = -l\cos\gamma.$$

Faisant $\beta = 0$, on a

$$\alpha = -l.$$

Ainsi la courbe passe par les points O, A, B; ce qu'on pouvait prévoir. Car le système des droites OA, OB représente une conique satisfaisant à la question, et dont le centre et les deux foyers sont réunis en O; de même la droite AB représente une ellipse dont le centre est en I, et dont les deux foyers sont en A et B.

3. Faisant

$$y'^2\cos\gamma + l\beta = 0, \quad \beta + 2\alpha\cos\gamma + l\cos\gamma = 0,$$

on obtient

$$\beta = \frac{-y'^2\cos\gamma}{l}, \qquad \alpha = \frac{y'^2 - l^2}{l};$$

c'est le foyer de la parabole. Ce point partage la courbe en deux parties; l'une renferme les foyers des hyperboles, et l'autre les foyers des ellipses dont aucune ne peut devenir un cercle, à moins que γ ne soit un angle droit.

4. Développant l'équation, on obtient, après avoir divisé par $\cos\gamma$,

$$l\beta(\beta^2 + 2\alpha\beta\cos\gamma + \alpha^2) + \alpha\beta(l^2 - y'^2) + \cos\gamma(l^2\beta^2 - \alpha^2 y'^2)$$
$$- ly'^2(\beta - 2\alpha\cos\gamma) - l^2y'^2\cos\gamma = 0.$$

Les deux facteurs de $\beta^2 + 2\alpha\beta\cos\gamma + \alpha^2$ étant imaginaires, la courbe ne peut avoir qu'une asymptote paral-

lèle à l'axe des α. L'équation de cette asymptote est

$$\beta = \frac{y'^2 \cos\gamma}{l} \text{ (voir Vannson, tome II, page 391).}$$

Si l'on fait $\cos\gamma = 0$, l'équation se décompose en $\beta = 0$, et

$$l(\beta^2 + \alpha^2) + \alpha(l^2 - y'^2) - ly'^2 = 0,$$

équation d'un cercle; le cercle correspondant aux foyers des hyperboles et la droite à ceux des ellipses.

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES D'ALGÈBRE;

PAR M. ABEL TRANSON.

1. Le dernier terme d'une suite surpasse le premier, de la somme de toutes les différences entre deux termes consécutifs.

Ce principe évident procure la démonstration de plusieurs résultats utiles (*).

Soit, premièrement, la suite

$$1^{m+1},\quad 2^{m+1},\quad 3^{m+1},\ldots,\quad n^{m+1},\quad (n+1)^{m+1}.$$

La différence entre deux termes consécutifs

$$x^{m+1},\quad (x+1)^{m+1}$$

étant égale à

$$(m+1)x^m + \frac{m+1 \cdot m}{1 \cdot 2} x^{m-1} + \ldots + 1,$$

(*) Cette identité sert de base au calcul aux différences, et par conséquent à la sommation des suites dont il va être question. TM.

il suit du principe énoncé qu'on a la relation

$$(n+1)^{m+1} = 1 + (m+1)S_m + \frac{(m+1)m}{1.2}S_{m-1} + \ldots + \frac{m+1}{1}S_1 + S_0;$$

équation où l'on représente par S_p la somme des puissances p des nombres naturels, depuis l'unité jusques et y compris celle de n, ou n^p.

De là

$$(1)\quad S_m = \frac{(n+1)^{m+1}-1}{m+1} - \frac{m}{2}S_{m-1} - \frac{m.m-1}{2.3}S_{m-2} - \ldots - S_1 - \frac{S_0}{m+1}.$$

Au lieu deconsidérer d'abord les sommes des puissances $(m+1)$ des nombres naturels, on aurait pu prendre les puissances des termes consécutifs d'une progression arithmétique quelconque, et l'on aurait trouvé la formule par la somme des puissances des termes d'une telle progression, que M. Lionnet a donnée (*Nouvelles Annales*, tome I, page 175), et qu'il préfère, avec raison, à celle des Traités élémentaires d'algèbre.

On peut trouver une formule beaucoup plus simple pour les sommes de puissances impaires.

2. Considérons la suite

$$0.1^{m+1},\ 1^{m+1}.2^{m+1},\ 2^{m+1}.3^{m+1},\ldots,\ n^{m+1}(n+1)^{m+1}.$$

La différence de deux termes consécutifs est

$$x^{m+1}[(x+1)^{m+1} - (x-1)^{m+1}]$$
$$= 2.x^{m+1}\left[(m+1)x^m + \frac{m+1.m+m-1}{1.2.3}x^{m-2} + \ldots\right];$$

d'où il suit, toujours en vertu du même principe et en ayant égard à la relation $n(n+1) = 2S_1$,

$$2^m(S_1)^{m+1} = (m+1)S_{2m+1} + \frac{m+1.m+(m-1)}{1.2.3.}S_{2m-1}$$
$$+ \frac{m+1.m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.5}S_{2m-3} + \ldots,$$

ou bien

$$(2)\ S_{2m+1} = \frac{2^m (S_1)^{m+1}}{m+1} - \frac{m^{2|-1}}{2^{2|1}} S_{2m-1} - \frac{m^{4|-1}}{2^{4|1}} S_{2m-3} \ldots$$

J'emploie ici, pour abréger, la notation adoptée par Kramp pour des produits de facteurs croissant ou décroissant en progression arithmétique, produits que ce géomètre appelle, comme on sait, des *facultés*.

D'après cette notation, on a en général

$$a(a+h)(a+2h)\ldots[a+(n-1)h] = a^{n|h};$$

l'exposant n de la faculté indique le nombre de facteurs, comme l'exposant d'une puissance, et la raison h peut être positive ou négative. Dans le cas de $h = 0$, la faculté devient une puissance.

La formule (2) présente, comme on voit, moitié moins de termes à calculer que la formule (1); et, en particulier, pour $m = 1$, elle donne tout de suite le résultat si remarquable et d'ailleurs bien connu

$$S_3 = (S_1)^2.$$

3. *Nombres figurés*. La somme des termes de la suite naturelle

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ldots,$$

donne lieu à la suite des nombres *triangulaires*

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ldots,$$

ainsi nommés parce qu'on peut ranger en triangles autant de points qu'ils contiennent d'unités. En ajoutant les nombres triangulaires, on forme les nombres *pyramidaux*

$$1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35,\ 56,\ 84,\ldots;$$

suite dont chaque terme représente, comme on sait, le nombre des boulets d'une pile triangulaire, qui a pour côté le dernier nombre triangulaire compris dans le pyramidal que l'on considère. Si l'on ajoute les nombres pyramidaux, on a une nouvelle suite, dont on peut, de nouveau, additionner les termes; et, en continuant ainsi indéfiniment, on a tous les *nombres figurés* (ceux au moins du *premier ordre* qui dépendent de la progression naturelle).

Or on sait qu'à l'aide de ces nombres on peut établir la loi du binôme à exposant entier et positif, d'une manière certainement plus directe et au moins aussi simple que par la considération des combinaisons. J'ose dire que cette démonstration du binôme qu'on trouve dans les anciens Traités d'algèbre mériterait bien d'être plus connue des élèves. Il peut donc y avoir quelque utilité à montrer combien aisément la formule des nombres figurés se déduit du principe énoncé au début de cet article.

Considérons la suite de facultés du second ordre

$$0.1,\ 1.2,\ 2.3,\ 3.4, \ldots,\ (n-1)n,\ n(n+1).$$

Comme la différence de deux termes consécutifs est égale au *double* du facteur qui leur est commun, on a immédiatement

$$n.\overline{n+1} = 2\sum x,$$

ou bien

$$\sum n = \frac{n.\overline{n+1}}{2};$$

ce qui est la somme des nombres naturels jusqu'à n, ou, autrement, le nombre triangulaire dont le côté est n.

Considérons de nouveau les facultés de troisième ordre

$$0.1.2,\ 1.2.3,\ 2.3.4, \ldots,\ (n-1)n(n+1),\ n(n+1)(n+2).$$

Comme la différence de deux termes consécutifs est égale

à *trois fois* le produit des facteurs qui leur sont communs, on en conclura

$$\sum n(n+1) = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{3},$$

et, par conséquent,

$$\sum \frac{n.\overline{n+1}}{2} = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{2.3};$$

ce qui est l'expression du nombre pyramidal dont le côté est n.

Plus généralement, si l'on considère les facultés du $(m+1)^{ième}$ ordre, c'est-à-dire à $(m+1)$ facteurs, à partir de celle dont le premier facteur est zéro et qui est nulle, jusqu'à la $(n+1)^{ième}$ dont le premier facteur est n, on verra que la différence de deux termes consécutifs est égale à $(m+1)$ *fois* le produit des m facteurs qui leur sont communs; et de là, toujours à l'aide du même principe,

$$\sum n(n+1)\ldots(n+m-1) = \frac{n.\overline{n+1}(n+2)\ldots(n+m)}{m+1},$$

et, par conséquent,

$$\sum \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m} = \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots m(m+1)};$$

ce qui est la formule pour le nombre figuré du $(m+1)^{ième}$ ordre.

Note. On démontre le binôme à exposant entier négatif, de la même manière que le binôme à exposant entier positif, en remplaçant les combinaisons *sans répétitions* par des combinaisons *avec répétitions*; de sorte que les coefficients sont encore des *nombres figurés* ordinaires. Lorsque l'exposant est fractionnaire, il s'agit de trouver une série telle, qu'en élevant cette série à une puissance entière, on obtienne une série dont les coeffi-

cients soient des *nombres figurés*; on démontre que les coefficients de la série cherchée sont encore des *nombres figurés*, mais à base fractionnaire : c'est l'immortelle découverte de Newton. TM.

SUR LES POINTS SINGULIERS DES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. CHOQUET.

1. Considérons une courbe algébrique quelconque; supposons l'origine des coordonnées placée en un de ses points, et faisons $\frac{y}{x} = t$: l'équation de la courbe pourra être mise sous cette forme

$$(1) \qquad A + Bt + x(C + Dt + Et^2) + \ldots = 0.$$

Je représenterai, pour abréger, le premier membre de cette équation par $F(x, t)$; et je désignerai par a le coefficient angulaire de la tangente au point pris pour origine, de sorte que l'on aura

$$A + Ba = 0.$$

2. Supposons d'abord que le coefficient B ne soit pas nul. Si l'on fait $t = a$ dans $F(x, t)$, la partie indépendante de x sera annulée. Il pourra se faire que les multiplicateurs de plusieurs puissances consécutives de x soient aussi rendus nuls, mais ils ne seront pas tous zéro; car, si cela était, le polynôme $xF(x, t)$ admettrait le facteur linéaire $y - ax$. Soit x^n la plus faible puissance de x dont le coefficient n'est pas nul quand on fait $t = a$; et soit H la valeur que prend alors ce coefficient. Pour $t = a$, en prenant x suffisamment petit, le polynôme $F(x, t)$ aura le signe de Hx^n. Si l'on fait $t = a + \alpha$, α étant une

quantité qu'on pourra prendre aussi petite qu'on le voudra, la quantité $A + Bt$ deviendra $B\alpha$, et le signe de $F(x, t)$, quand on prendra x suffisamment petit, sera celui de $B\alpha$. Or on peut disposer du signe de α de manière que le signe de $B\alpha$ soit contraire à celui de Hx^n, quel que soit d'ailleurs le signe de x; et quand le polynôme $F(x, t)$ a des signes contraires pour $t = a$ et pour $t = a + \alpha$, l'équation $F(x, t) = 0$, ou l'équation (1) est vérifiée par une valeur réelle de t comprise entre a et $a + \alpha$. Il suit de là que, dans le cas que nous examinons, la courbe a des points dans le voisinage de l'origine, du côté des x positifs et du côté des x négatifs.

3. Si l'exposant n est impair, on fera prendre des signes contraires aux deux termes Hx^n et $B\alpha$ en prenant pour α des signes différents, suivant que x sera positif ou négatif; ce qui prouve que la courbe existera à droite et à gauche de l'origine, du même côté de sa tangente.

Si, au contraire, l'exposant n est pair, la quantité α devra garder un signe invariable pour que le signe de $B\alpha$ soit contraire à celui de Hx^n, quand on supposera successivement x positif et x négatif. Dans ce cas, la courbe passe à l'origine d'un côté à l'autre de sa tangente, et elle a par conséquent un point d'inflexion.

4. La courbe n'a pas plusieurs branches qui passent à l'origine; car la dérivée par rapport à t de l'équation (1) est

$$B + x(D + 2Et) + \ldots . \tag{2}$$

Elle est différente de zéro pour toutes les valeurs suffisamment petites de x; par conséquent, pour de telles valeurs, l'équation (1) ne peut pas être vérifiée par deux valeurs réelles de t (*).

(*) Cette démonstration ne prouve pas que la courbe n'a aucune branche tangente à l'axe des y; car, pour que le polynôme (2) conserve

5. L'exposant n indique l'ordre du contact de la courbe avec sa tangente; car, pour $t = a$ ou $y = ax$, l'équation $x \mathrm{F}(x, t)$ a $n + 1$ racines nulles; d'où il suit que la droite $y = ax$ rencontre la courbe en $n + 1$ points réunis en un seul.

6. Les mêmes conclusions subsistent en supposant $\mathrm{B} = 0$, si A n'est pas nul, puisqu'on peut changer dans les raisonnements x en y et y en x.

7. Examinons maintenant le cas où l'on a à la fois $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$. Le coefficient angulaire de la tangente dépend alors d'une équation d'un degré supérieur au premier. Soit $\varphi(t) = 0$ cette équation; de sorte que l'équation (1) sera

$$(3) \qquad x^p \varphi(t) + x^{p+1} \psi(t) + \ldots = 0.$$

Soit a une des racines réelles de l'équation $\varphi(t) = 0$ (*), et faisons encore dans le polynôme $\mathrm{F}(x, t)$, $t = a$ et $t = a + \alpha$. Soit $\mathrm{H}x^q$ le terme de plus faible puissance de x dans le résultat qu'on obtient pour $t = a$; soit k la valeur de la première dérivée de $\varphi(t)$ qui n'est pas rendue nulle par $t = a$. Si r est l'ordre de cette dérivée, lorsqu'on fera $t = a + \alpha$, le polynôme $\varphi(t)$ aura, pour de très-petites valeurs de α, le signe de $k\alpha^r$, et le polynôme $\mathrm{F}(x, t)$, en donnant à x des valeurs suffisamment petites, aura le signe de $k\alpha^r x^p$.

---

le même signe, x étant très-petit, il faut que t ne croisse pas de manière à devenir infini pour $x = 0$. Mais l'équation de la courbe peut être mise sous cette autre forme,

$$\mathrm{B} + \mathrm{A}\frac{x}{y} + y\left(\mathrm{E} + \mathrm{D}\frac{x}{y} + \mathrm{C}\frac{x^2}{y^2}\right) + \ldots = 0.$$

S'il existe des branches tangentes à l'axe des y, il faudra que, pour des valeurs suffisamment petites de y, on ait des valeurs très-petites de $\frac{x}{y}$; or, B n'étant pas nul, l'équation ci-dessus ne peut être vérifiée par de telles valeurs.

(*) Si $\varphi(t) = 0$ n'a pas de racines réelles, le point est *isolé*.

Les deux termes Hx^q et $k\alpha^r x^p$ auront le même signe ou des signes contraires en même temps que ceux-ci Hx^{q-p} et $k\alpha^r$. Or, si l'exposant r est impair, il en sera des signes de ces deux termes, lorsqu'on supposera successivement x et α positifs et négatifs, comme dans le cas que nous avons considéré plus haut. Donc la courbe aura encore une branche tangente à la droite $y = ax$, qui s'étendra de part et d'autre de l'origine, et qui sera située d'un seul côté de la tangente, ou qui passera d'un côté à l'autre de cette droite, suivant que l'exposant $q-p$ sera un nombre impair ou un nombre pair.

Si la courbe a plusieurs branches tangentes à l'origine à la droite $y = ax$, il y en a un nombre impair d'un côté et de l'autre de l'axe des y et d'un même côté de la tangente, lorsque l'exposant $q-p$ est impair; et il n'y en a aucune, ou il y en a un nombre pair de part et d'autre de l'axe des y, et de l'autre côté de la tangente. Lorsque l'exposant $q-p$ est pair, les branches de la courbe sont en nombre impair dans l'un des angles de la tangente avec l'axe des y et dans son opposé; et il n'y en a aucune ou il y en a un nombre pair dans chacun des deux autres angles opposés.

Quand l'exposant r est pair et l'exposant $q-p$ impair, les deux termes Hx^{q-p} et $k\alpha^r$ ont des signes contraires pour un signe invariable de x, et des valeurs positives ou négatives de α; ce qui prouve que la courbe a deux branches tangentes à la même droite $y = ax$, d'un côté et de l'autre de cette droite, et situées toutes deux du côté des x positives, ou du côté des x négatives; de sorte qu'elles forment un rebroussement de première espèce. Si la courbe a un plus grand nombre de branches tangentes à la droite $y = ax$, il y en a un nombre impair au-dessus et au-dessous de la tangente d'un côté de l'axe des y, et il n'y en a aucune ou il y en a un nombre pair au-dessus et

au-dessous de la tangente, de l'autre côté de l'axe des y.

Quand les deux exposants r et $q-p$ sont pairs, les signes des termes Hx^{q-p} et $k\alpha^r$ sont invariables. Dans ce cas, si les coefficients H et k ont le même signe, l'origine peut être un point isolé; et s'il y a des branches de la courbe qui passent par ce point, elles ne peuvent être qu'en nombre pair dans chacun des quatre angles formés par la tangente et l'axe des y. Si les coefficients H et k ont des signes contraires, il y a dans chacun de ces quatre angles un nombre impair de branches de la courbe.

Dans tous les cas, le nombre total des branches de la courbe dans les quatre angles formés par la tangente et l'axe des y est pair. Celles qui sont en même nombre dans deux angles opposés, ou dans deux angles adjacents d'un même côté de la tangente, sont les continuations les unes des autres et ne peuvent offrir que des points d'inflexion. Celles qui ne se continuent pas les unes les autres sont en nombre pair et forment des rebroussements. Il ne peut y avoir ni points d'arrêt, ni points anguleux.

8. Le nombre des branches tangentes à la droite $y=ax$, d'un même côté de l'axe des y, ne peut excéder le degré de multiplicité r de la racine a de l'équation $\varphi(t)=0$; car la dérivée de l'ordre r de $\varphi(t)$ ayant, pour $t=a$, une valeur k différente de zéro, la dérivée du même ordre, par rapport à t de l'équation (3), quand on y fait $t=a$ et $t=a\pm\alpha$, garde constamment le même signe, et ne peut devenir nulle, pour des valeurs suffisamment petites de x et de α. Donc, suivant le théorème de Rolle, l'équation (3) ne peut être vérifiée par plus de r valeurs réelles de t comprises entre a et $a\pm\alpha$, en prenant la valeur de α suffisamment petite.

SOLUTION DE LA QUESTION 223

(voir t. IX, p. 180);

PAR MM. LES ABBÉS JULLIEN ET CLAUDE,
Professeurs au séminaire de Vals.

1. *Définition.* a_1, a_2, a_3, a_4 étant quatre points se succédant dans cet ordre sur une droite, le rapport segmentaire $\frac{a_2a_3 \cdot a_1a_4}{a_1a_2 \cdot a_3a_4}$ est nommé *rapport anharmonique*.

2. *Lemme.* Un faisceau plan de quatre droites étant coupé par deux transversales, le rapport anharmonique formé sur l'une des transversales est égal au rapport anharmonique formé sur la seconde transversale.

3. *Lemme.* a_1, a_2, a_3, a_4 étant quatre points se succédant dans cet ordre, sur une droite, et de même b_1, b_2, b_3, b_4, quatre points sur une autre droite, on suppose que les deux rapports anharmoniques sont égaux. Si les trois droites a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 passent par un même point, la quatrième droite a_4b_4 passera aussi par ce point.

4. PROBLÈME. *a_1, a_2, a_3 étant trois points placés sur une droite; b_1, b_2, b_3 étant trois autres points situés sur une autre droite; on propose de placer ces deux droites de manière que les trois droites a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 passent par le même point.*

Solution. Par un point quelconque O, menons les trois droites Oa_1, Oa_2, Oa_3; sur b_1b_2 décrivons un segment capable de l'angle a_1Oa_2, et sur b_2b_3, un second segment capable de l'angle a_2Oa_3; soit O' l'intersection des deux arcs. On pourra placer cette seconde figure sur la première, dans deux positions différentes qui résol-

vent le problème, lequel est susceptible d'une infinité de solutions.

5. Problème. *Quatre points* a_1, a_2, a_3, a_4 *sont sur une ligne droite, de même que les quatre points* b_1, b_2, b_3, b_4; *on propose de placer les deux droites de telle sorte que les quatre droites qui réunissent les points de même indice passent par le même point.*

Solution. Si les rapports anharmoniques fournis par les deux droites ne sont pas égaux, le problème est impossible; s'ils sont égaux, on place les droites dans une position telle, que les droites a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 se coupent en un point (problème 4). Alors, la droite a_4b_4 passe aussi par ce point (lemme 3).

6. Question 223. *n points* a_1, a_2, a_3,..., a_n *sont placés sur une droite; n autres points* b_1, b_2,..., b_n *sont placés sur une autre droite; dans quel cas pourra-t-on mettre les deux droites dans une telle position, que les lignes de jonction* a_1b_1, a_2b_2,..., a_nb_n *convergent vers le même point?*

Solution. Pour que le problème soit possible, il faut que quatre points successifs de la ligne des a donnent le même rapport anharmonique que les quatre points correspondants de la ligne des b (lemme 2). Cette condition étant remplie, on place les droites de telle sorte, que les droites de jonction de trois points consécutifs de la ligne des a aux points correspondants de la ligne des b, convergent vers le même point (problème 4); les autres lignes de jonction convergeront aussi vers ce point (lemme 3).

Le problème admet donc une infinité de solutions.

Observation. Lorsqu'un segment quelconque de la droite des a divisé par le segment correspondant de la droite des b, donne constamment le même quotient, les droites de jonction sont parallèles et le centre de convergence est à l'infini.

Autrement. Supposons le problème résolu. Soit O le centre de convergence; menons par O une parallèle à la droite des b rencontrant la droite des a en A, et par le même point O une parallèle à la droite des a, rencontrant la droite des b en B. Le produit $Aa_p \times Bb_p$, où p désigne un indice quelconque, est constant (*voir* page 146); A a pour correspondant un point situé à l'infini sur la ligne des b, et B a pour correspondant un point situé à l'infini sur la ligne des a. Sans mettre les droites dans une position perspective, prenons sur la droite des a un point quelconque A, et déterminons sur la droite des b un point B tel, que l'on ait

$$Aa_1 . Bb_1 = Aa_2 . Bb_2;$$

ce qui est possible, puisqu'on a encore l'équation du premier degré

$$Bb_2 - Bb_1 = b_1 b_2.$$

On devra avoir

$$Aa_p . Bb_p = Aa_1 . Bb_1,$$

quel que soit p, sans cela le problème est impossible. Étant donc donné un point a_r sur la ligne des a, on pourra tracer, à l'aide des points A et B, le point correspondant b_r, sans avoir besoin de mettre les droites dans une position perspective; si ensuite on place a_r sur b_r, les droites seront dans une position perspective.

Si $Aa_r = Bb_r$ et si l'on pose b_r sur a_r et B sur A, les points $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont alors dits être en *involution*, et le point A prend le nom de *centre d'involution*.

Observation. Les segments Aa_p et Bb_p peuvent être considérés comme des coordonnées d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. Ce genre de problèmes perspectifs se ramène à des problèmes sur cette courbe considérée relativement à ses asymptotes (*).

(*) C'est aussi la théorie des *points réciproques;* nom très-expressif.

SUR UN ARTICLE ADDITIONNEL AU PROGRAMME D'EXAMEN D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, EN 1850.

Un jeune homme consacre les plus belles années de sa jeunesse à faire des études pénibles, qui le plus souvent lui déplaisent, afin d'acquérir un *état*. Dans la même intention, les parents dépensent quelquefois des sommes si considérables, que, s'ils avaient placé ces sommes à *fonds perdus*, ils auraient souvent assuré, à leur enfant, un sort plus doux que celui qui l'attend. Arrive le jour fatal. Alors un juge, armé d'un pouvoir discrétionnaire, après un interrogatoire de soixante à quatre-vingt-dix minutes, peut anéantir d'un seul trait de plume, au moyen d'un chiffre nommé *coefficient*, le fruit de tant d'années de travail, de tant de pénibles sacrifices. On a cherché un remède à cette redoutable omnipotence en établissant deux juges, formant deux tribunaux distincts, entre les décisions desquels il faut choisir; mais, quand il y a dissentiment, comment choisir? car, selon le degré d'instruction, de perspicacité, d'expérience pédagogique qui ne s'improvise pas, le juge lui-même aurait besoin d'être *coefficienté*, pour pouvoir tarifer son jugement. D'ailleurs, souvent l'examinateur du matin, dispos, affable, bienveillant, de bon accueil, n'est pas le même homme que l'examinateur du soir, fatigué, ennuyé, impatienté et de mauvaise humeur. Tout cela rend la méthode des *coefficients*, telle qu'on l'applique aux examens pour l'École Polytechnique, très-chanceuse. Le mode adopté pour l'École de Saint-Cyr est plus rationnel. Un premier *jury* d'épuration, servant pour ainsi dire de crible, facilite beaucoup le travail du second *jury* d'admission. Ce mode a encore été amélioré pour

l'École Normale. Tous les candidats reconnus admissibles par le premier jury se rendent à Paris, où siége le second jury. Ce mode serait très-praticable pour l'École Polytechnique (*), et ne laisserait rien à désirer, surtout si l'on ne s'en tient pas seulement au résultat actuel de l'examen, et si l'on s'enquiert des précédents du candidat; car on peut avoir montré de l'esprit à telle heure et être médiocre le reste de la journée. Il faudrait prescrire de consulter les notes scolaires de l'élève et y attacher une haute importance. Une telle prescription, si elle était connue, imprimerait aux études une impulsion continue. Tel serait le moyen de diminuer, d'atténuer les chances d'erreurs et d'injustices involontaires, qui subsisteront toujours, quoi qu'on fasse, vu la caducité de l'esprit humain. Qu'a-t-on fait? Un article additionnel ainsi conçu : « Les matières » des épreuves orales seront partagées entre les deux exa- » minateurs de la manière suivante : L'un des examens » portera exclusivement sur l'arithmétique et l'algèbre, » et l'application de l'algèbre à la géométrie; l'autre sur » la géométrie, la trigonométrie, la géométrie descriptive » et la statique. Il y aura un intervalle obligatoire de » quatre jours entre les deux examens d'un même can- » didat. » (*Moniteur* du 15 février 1850, page 1206, 3e colonne.) En d'autres termes, il y aura un examinateur pour les mathématiques élémentaires, faciles, et un autre pour les mathématiques supérieures, difficiles. Ainsi, au lieu d'avoir deux juges différents pour la même cause, vous aurez deux juges différents pour deux causes différentes, et ces causes ne peuvent avoir la même valeur *coefficientelle*; car, à tout prendre, il est plus facile de savoir

(*) Les frais de voyage, selon la position des familles, pourraient être classés parmi les dépenses départementales.

les choses faciles que les choses difficiles. Lorsqu'une cause sera déclarée bonne et l'autre mauvaise, comment opterez-vous? Aux incertitudes signalées, on en a ajouté une nouvelle, et cela s'appelle *perfectionnement.* C'est ainsi qu'on a *perfectionné* le programme, en rayant la théorie la plus importante, celle de l'élimination, et cela au moment où cette opération est devenue, par la méthode Sylvester, d'une extrême facilité. Si ce sont là des perfectionnements, qu'on dise comment on s'y prendrait pour *déperfectionner* l'École? On va nommer une Commission pour en améliorer les études; elle sera, selon l'usage, composée d'hommes d'un mérite pratique qui ont fini leurs études, c'est-à-dire qui n'étudient plus. Hélas!

Huet, le célèbre évêque d'Avranches, appartient au siècle où les savants, parlant très-peu des travailleurs, travaillaient beaucoup. Enfermé dans son cabinet, lorsqu'on venait pour affaires, ses gens répondaient souvent : *Monseigneur étudie.* Ce qui fit dire aux diocésains : *Quand nous donnera-t-on un évêque qui ait fini ses études?* Nous dirons: *Quand nous donnera-t-on une Commission d'études qui n'ait pas fini ses études?*

P. S. La Commission est nommée (*Moniteur,* 11 juillet); l'*utilité* y domine, les sommités mathématiques sont exclues: mais, par contre, on a admis un professeur qui a imprimé que la *Mécanique analytique* a retardé le développement de la science des *machines* que les *analystes* Léonard et Daniel ont créée. Bientôt ils vous diront que la *Géométrie analytique* a nui aux progrès de la *Géodésie,* et que la *Mécanique céleste* a arrêté l'essor de l'*Astronomie.* Félicitons-nous donc de n'avoir plus ni Descartes, ni Lagrange, ni Laplace; individus qui enrayent l'esprit humain, mais qui sont heureusement d'une excessive rareté. Confiée désormais à une population de savants

utiles, la gloire intellectuelle de la France ne connaîtra plus d'infranchissables limites (*).

CORRESPONDANCE.

1. On nous a adressé un moyen *élémentaire* de déterminer le centre de gravité d'un arc de cercle. Quoique ce moyen soit très-bon, nous ne l'insérons pas pour deux raisons. La première est qu'on peut trouver ce centre très-élémentairement et immédiatement par le théorème de Guldin; théorème dont Legendre fait un usage implicite dans la recherche de l'aire du cône tronqué. La seconde raison est qu'il faut ici naturellement faire emploi du calcul intégral, dont les éléments devraient faire partie de l'enseignement supérieur des colléges. C'est ce que voulait d'Alembert il y a plus d'un siècle, et c'est ce que demandait Coriolis, mort directeur des *études* à l'École Polytechnique, et néanmoins, chose singulière, s'occupant et s'enquérant des études. Cependant, rien n'y fera. On persistera indéfiniment, par un double tour de gobelet, à escamoter les différentielles à l'aide de la lettre grecque ε, et à escamoter les intégrales au moyen de la même lettre, précédée du mot *limite*.

2. M. l'abbé Jullien donne une seconde solution de la question 194 (*voir* page 172); elle consiste à exprimer l'aire du polygone en fonction des coordonnées des som-

---

(*) On parle d'une nouvelle disposition d'examen; n'étant pas dans le *Moniteur*, je ne puis en admettre ni la légalité, ni même l'authenticité. Les auteurs de cette disposition subreptice, si elle existe, assumeraient sur eux une grave responsabilité, et même les examinateurs, s'ils s'y conformaient.



mets, et ensuite ces coordonnées en fonction des données de la question.

3. M. Loxhay (de Bruxelles) donne une troisième solution de la question 219 (*voir* page 206); il coupe les deux tétraèdres par un plan, obtient un hexagone, et, à l'aide de l'hexagramme de Pascal, il vérifie analytiquement que l'hexagone est inscriptible dans une conique. On pourrait de même vérifier le théorème 220, à l'aide de l'hexagramme de Brianchon. Ces méthodes indirectes ne doivent être admises que provisoirement.

Le même géomètre a adressé une solution de la question 217; elle ne diffère pas essentiellement de celle qu'on lit page 215.

4. M. l'abbé Lecointe (séminaire de Vals), M. Ploix (de Versailles), et M. le professeur Vachette (Paris), ont résolu la question 226 par la théorie des sections angulaires; solution donnée page 233.

5. M. de Pistoris, capitaine d'artillerie, donne une seconde démonstration du théorème de M. Strebor sur les paraboles homofocales par les polaires réciproques. On prend pour conique directrice un cercle, ayant son centre au foyer commun des paraboles; les polaires réciproques de celles-ci seront aussi des cercles passant par le foyer commun. La démonstration s'achève facilement (*voir* tome VIII, page 297); cette démonstration est accompagnée de ce théorème : *Si l'on prend sur la ligne des centres de deux cercles deux points équidistants de l'axe radical, et qu'on les joigne à l'un des points d'intersection, les cordes totales interceptées par les deux circonférences sont égales.*

RAYON DE COURBURE D'UNE CONIQUE;

PAR M. ÉMILE FAUCON,
Élève du lycée Charlemagne (division de M. Catalan).

THÉORÈME. *On prolonge le rayon de courbure d'une conique, à l'extérieur, d'une longueur égale à ce rayon; le cercle décrit sur le prolongement comme diamètre coupe orthogonalement le lieu géométrique du sommet de l'angle droit circonscrit à la même conique.*

(STEINER.)

On déduit, de ce théorème démontré par M. Edmond Ploix (page 59), un moyen très-simple de déterminer le rayon de courbure d'une conique en un point donné sur cette conique.

Je conserve les notations de M. Ploix. De plus, je désigne par R et S les points où la normale en A rencontre le cercle de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, M étant l'extrémité du prolongement du rayon de courbure en A; et je dis que *les quatre points* R, A, S, M *sont quatre points harmoniques.*

En effet,

$$\mathrm{RO.SO} = \overline{\mathrm{GO}}^2,$$

et

$$\mathrm{AO} = \mathrm{GO};$$

donc

$$\mathrm{RO.SO} = \overline{\mathrm{AO}}^2.$$

Le point M, étant le conjugué harmonique de A par rapport à R et S, se déterminera facilement; par suite, on connaîtra AM.

SUR LE FAISCEAU DE NORMALES A UNE LIGNE PLANE ET A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE;

D'APRÈS LE RÉV. GEORGE SALMON.

(*The Cambridge and Dublin mathematical Journal;* février 1848, p. 46.)

1. THÉORÈME. *Par un point donné, on peut mener* au plus n^2 *normales à une courbe algébrique de degré* n *et au plus* $n^3 - n^2 + n$ *normales à une surface algébrique de degré* n.

Démonstration. Lignes. Supposons que le point soit situé à l'infini; pour une direction donnée, le faisceau sera formé de $n^2 - n$ normales, autant qu'il y a de tangentes parallèles : de plus, la courbe a, généralement parlant, n asymptotes, dont les normales correspondantes sont situées à l'infini, et par conséquent aussi leurs points d'intersection; le nombre des normales partant d'un point placé à l'infini est donc $n^2 - n + n = n^2$. Mais ce nombre doit rester le même, quel que soit le centre du faisceau; donc, etc.

Surfaces. Soit encore le point situé à l'infini. Le faisceau aura d'abord $n(n-1)^2$ normales, autant qu'il y a de plans tangents parallèles; ensuite tous les points à l'infini peuvent être considérés comme formés par l'intersection d'un plan à l'infini avec la surface; les normales à cette section sont aussi normales à la surface; le nombre des normales à cette surface plane, menée par un point, est n^2; donc le nombre total des normales est

$$n(n-1)^2 + n^2 = n^3 - n^2 + n.$$

Observation. Ces nombres sont des limites. Lorsque la courbe a des points multiples, des points d'inflexion, ou

bien lorsque la courbe est parabolique, le nombre des tangentes parallèles à une direction donnée est diminué, de même que le nombre des normales parallèles. Il en est de même lorsque le centre du faisceau est un point singulier de la courbe.

Observation. On trouve une démonstration analytique de ce même théorème dans le Journal de M. Liouville (tome IV, page 175, 1839) ; la démonstration actuelle est une bonne vérification. L'eût-on adoptée avec confiance de prime abord? Le passage de l'infini au fini présente beaucoup moins de certitude que le passage dans la direction opposée.

2. Soient $F(x, y) = 0$, l'équation de la courbe de degré n ; P et Q les dérivées du premier membre par rapport à x et par rapport à y; P_1, Q_1 les valeurs de P et de Q pour un point (x_1, y_1) de la courbe. Prenant l'origine pour centre d'un faisceau normal, l'équation de cette normale est

$$yP_1 - xQ_1 = 0\,;$$

P_1, Q_1 se rapportent au point où la normale coupe la courbe, et on a les deux équations simultanées

$$(a)\qquad F(x_1, y_1) = 0, \quad y_1P_1 - x_1Q_1 = 0,$$

qui ont n^2 solutions communes. On a donc n^2 systèmes d'équation

$$yP_r - xQ_r = 0,$$

r ayant toutes les valeurs de 1 à n^2. Le produit de ces équations présente le système du faisceau normal; dans ce cas, les fonctions P_r, Q_r disparaissent, car ce sont des fonctions symétriques des valeurs communes au système d'équations (a); ce produit est donc une fonction entière de degré n^2. Soit L ce produit; $L = 0$ représente une ligne de l'ordre n^2 qui coupe la courbe en n^3 points. Or n^2 de ces points où les normales rencontrent rectangulaire-

ment, sont sur une ligne d'ordre n; il s'ensuit que les $n^3 - n^2$ autres points où les normales coupent obliquement sont sur une ligne d'ordre $n^2 - n$.

QUESTION 1 DE M. STREBOR

(voir t. IX, p. 181).

PAR M. J. LEFÈVRE (DE SOISSONS),
Élève de M. Watelet.

PROBLÈME. *Soient* X, Y, *deux points pris sur les prolongements des axes d'une ellipse dont le centre est* O, *tels que, si* P *et* Q *sont respectivement les points de contact des tangentes menées par* X *et* Y, *les angles* OXP, OYQ *soient égaux. Trouver la courbe, lieu du point dont* OX, OY *sont les coordonnées.*

Solution. Prenons pour axes des coordonnées les axes de l'ellipse; faisons OX $= x$, OY $= y$, et appelons x', y', x'', y'', les coordonnées des points de contact P et Q. Puisque les points P et Q sont sur l'ellipse, nous aurons les deux équations

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

$$a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2. \tag{2}$$

Mais la longueur OX est l'abscisse du point où la tangente PX rencontre l'axe des x, de même OY est l'ordonnée du point où la tangente QY coupe l'axe des y; donc

$$x = \frac{a^2}{x'}, \tag{3}$$

$$y = \frac{b^2}{y''}. \tag{4}$$

D'ailleurs, puisque les angles OXP, OYQ doivent être

égaux, on a

$$(5) \qquad \frac{b^2 x'}{a^2 y'} = \frac{a^2 y''}{b^2 x''}.$$

Éliminant x', y', x'', y'' entre les cinq équations, on trouve

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 = a^4 - b^4.$$

Ainsi le lieu cherché est une hyperbole, qui se réduit à deux droites, lorsque l'ellipse devient un cercle. Lorsque P est à l'extrémité d'un axe, Q est à l'extrémité de l'autre axe, et OX, OY sont infinis. On peut donc prévoir à priori que le lieu cherché est une courbe infinie.

P et Q se confondent à l'extrémité du diamètre de l'ellipse donnée par l'équation

$$y = \frac{b^2}{a^2} x,$$

et dans l'hyperbole de ci-dessus, on a alors

$$x^2 = y^2 = a^2 + b^2.$$

Observation. Si l'on remplace $+ b^2$ par $- b^2$, la conique donnée devient une hyperbole et le lieu cherché une ellipse donnée par l'équation

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^4 - b^4;$$

ellipse réelle si $a > b$, et imaginaire si $a < b$; pour $a = b$, l'ellipse se réduit à un point.

Observation. M. l'abbé Manganotti (séminaire de Vals) résout le même problème et ajoute que, si l'on donne une parabole, et qu'au lieu des axes OX, OY, on considère l'axe de la parabole et la tangente menée au sommet, on trouve, pour l'équation du lieu,

$$y^2 x = -\left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

hyperbole cubique.

DEUX THÉORÈMES SUR LES AIRES DU TRIANGLE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE.

1. Soient a, b, c les côtés ; A, B, C les angles ; p le demi-périmètre ; S l'aire d'un triangle, soit rectiligne, soit sphérique : dans ce dernier cas, S désigne l'excès sphérique.

2. 1er THÉORÈME.

$$p^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \operatorname{tang} \frac{1}{2} C = S.$$

2e THÉORÈME.

$$\sin^2 p \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \operatorname{tang} \frac{1}{2} C = 2 \sin \frac{S}{2} \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c.$$

Observation. Ces deux théorèmes étant très-faciles à établir de diverses manières, on n'en insérera pas les démonstrations ; mais on demande comment on passe du second théorème au premier, que j'ai trouvé dans un programme de l'Université de Dublin.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE M. STURM ;

PAR M. MOURGUES,
Professeur à Marseille.

Un lemme de ce théorème a pour énoncé :

Si a est une racine de $f(x) = 0$, $f(x)$ *et* $f'(x)$ *offrent une variation pour* $x = a - h$ *et une permanence pour* $x = a + h$.

En modifiant légèrement la démonstration ordinaire,

on la rend applicable au cas où a est une racine multiple.

Effectivement

$$f(a-2h)-f(a-h)=-hf'(a-h)+\frac{h^2}{1.2}f''(a-h)\ldots,$$

$$f(a+2h)-f(a+h)=hf'(a+h)+\frac{h^2}{1.2}f''(a+h)\ldots.$$

Or, $f(a)$ étant nul, on peut donner à $2h$ une valeur assez petite pour que $f(x)$ varie en grandeur dans un même sens de $x=a-2h$ à $x=a$, comme de $x=a$ à $x=a+2h$.

Les signes des premiers membres sont donc ceux de $f(a-2h)$ et $f(a+2h)$, et, par suite, ceux de $f(a-h)$ et $f(a+h)$. Dailleurs les signes des seconds membres sont ceux de $-f'(a-h)$ et $f'(a+h)$; donc $f(a-h)$ et $f'(a-h)$ sont de signes contraires, et $f(a+h)$ et $f'(a+h)$ sont de même signe, que a soit une racine simple ou multiple.

Corollaire. Il en sera de même pour $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ et $\frac{f'(x)}{\varphi(x)}$, $\varphi(x)$ désignant un polynôme qui ne s'évanouit, ni pour $x=a-h$, ni pour $x=a+h$, puisqu'on ne fera ainsi que multiplier en même temps $f(x)$ et $f'(x)$ par un nombre positif ou négatif.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 135

(voir t. IX, p. 81);

PAR M. SALLÉ DELACODRE,
Élève (institution Mage).

Quelle relation doit-il exister entre les côtés d'un triangle isocèle et la base pour que la bissectrice de l'angle à la base ait un rapport donné avec le côté du triangle?

Soient ABC un triangle isocèle, BD la bissectrice de l'angle à la base. Faisons,

$$AB = AC = b, \quad BC = a, \quad BD = c;$$

il doit exister entre la bissectrice et le côté b un rapport donné m. Je pose $\frac{c}{b} = m$,

$$AD = h, \quad DC = l.$$

Quand on mène la bissectrice d'un triangle, on sait (Blanchet, livre II) que le produit des côtés qui comprennent l'angle est égal au produit des segments déterminés par la bissectrice sur le côté opposé, augmenté du carré de la bissectrice; donc on aura

$$ab = c^2 + hl.$$

Or, d'après une seconde propriété de la bissectrice,

(1) $$\frac{h}{l} = \frac{b}{a};$$

$h + l = b$; donc $h = \frac{b^2}{a+b}$. En substituant dans l'égalité ci-dessus les valeurs des segments h, l, et remarquant que $c = bm$, on aura

$$ab = b^2m^2 + \frac{ab^3}{(b+a)^2},$$

$$a(a^2 + 2ab) = bm^2(a+b)^2;$$

relation cherchée.

PROPRIÉTÉS DES ASYMPTOTES DE L'HYPERBOLE;

PAR M. SALLÉ DELACODRE,
Élève (institution Mage).

1°. Si, du foyer, on abaisse une perpendiculaire sur l'asymptote, cette perpendiculaire rencontre la directrice au même point que l'asymptote.

2°. La partie de la parallèle à une asymptote menée par un point de la courbe et terminée à la directrice, est égale au rayon focal qui passe par ce point.

3°. Si, d'un point extérieur, on mène deux tangentes et qu'on les prolonge jusqu'à la rencontre d'une asymptote, de même si l'on prolonge la corde de contact jusqu'à la rencontre de la même asymptote, le point d'intersection de la corde de contact avec l'asymptote est au milieu des deux précédents points de rencontre.

Observation. La projection perspective donne un théorème général.

4°. Si, sur une corde de l'hyperbole comme diagonale, on construit un parallélogramme dont les côtés soient parallèles aux asymptotes, l'autre diagonale passe par le centre.

Note. On n'admettra que des solutions *géométriques et sans figures*; de préférence celles qui sont déduites de théorèmes généraux connus.

GRAND CONCOURS DE 1850

(voir t. VIII, p. 315).

QUESTIONS PROPOSÉES.

Mathématiques supérieures.

Étant donnés deux axes fixes ox, oy; autour d'un point fixe P, pris dans le plan de ces axes, on fait tourner un angle aPb de grandeur donnée et constante (a marquant le point où l'un des côtés de l'angle va couper l'axe ox, et b le point où l'autre côté va couper l'autre axe oy).

On demande de prouver qu'il existe sur l'axe ox un point fixe A et sur l'axe oy un point fixe B, tels que le produit du segment Aa par Bb reste constant pour toutes les positions de l'angle.

On examinera le cas particulier où les axes ox et oy coïncident.

Mathématiques. élémentaires.

1[re] *Question.* Par le point P de deux circonférences qui se coupent, on mène deux droites rectangulaires qui rencontrent la ligne des centres en a et a', et les deux circonférences en b, c et b', c'. Il s'agit de démontrer qu'on a toujours la relation

$$\frac{ab}{ac} = \frac{a'b'}{a'c'}.$$

2[e] *Question.* Étant donnés deux points fixes A et B et deux lignes de longueurs constantes λ et μ; on prend sur la direction de AB un point quelconque M qu'on regarde

comme le centre d'un cercle décrit d'un rayon R, déterminé par la relation

$$R.AB = \lambda.AM + \mu.BM.$$

On demande de prouver que les différents cercles, ainsi décrits pour les différents points M de la droite AB, sont tous tangents à deux mêmes droites fixes.

Note. La question *supérieure,* se ramenant à des lieux géométriques, très-connus, est trop facile. La considération de l'infini donne immédiatement les points fixes cherchés; toujours de la géométrie plane, toujours au rez-de-chaussée!

Les questions élémentaires sont bien choisies, surtout la seconde.

Nous n'insérerons que des solutions données par des élèves; de préférence celles qui s'appuient sur des théorèmes généraux et dont la rédaction soit assez claire pour qu'on puisse se passer de figures.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES.

1. Deux courbes algébriques planes se coupent en un nombre de points égal au produit des deux nombres indiquant les degrés des courbes.

Observation. Dans tout ce qui suit, on suppose une courbe de degré n.

2. *Théorème segmentaire de Newton*. Par un point O pris dans le plan de la courbe, on mène deux transversales de *directions données*. Chaque transversale forme n segments à compter du point O. Le produit des segments formés par la transversale de la première direction, divisé par le produit de la transversale de la seconde direction, donne un quotient constant quel que soit le point O.

Démonstration, voir tome III, pages 416 et 510.

3. *Théorème segmentaire de Carnot.* Soit un polygone de p côtés tracé dans le plan de la courbe; soient A_1, A_2, A_3, . ., A_p les sommets consécutifs du polygone. Considérant A_1, A_2, A_3, . . ., A_p successivement comme des points fixes, les sécantes A_1A_2, A_2A_3, . . ., $A_{p-1}A_p$ formeront chacune n segments et en tout pn segments: relativement aux points fixes A_1, A_p, A_{p-1}, . . ., A_2 et aux sécantes A_1A_p, A_pA_{p-1}, $A_{p-1}A_{p-2}$, . . ., A_2A_1, on aura mn autres segments; le produit des mn premiers segments est égal au produit des mn seconds segments.

Démonstration, voir tome IV, page 526.

4. *Théorème segmentaire général.* Par le point O pris dans le plan de la courbe et non sur la courbe, on mène une transversale formant en O des segments en nombre n. Soit $F_n + F_{n-1} + F_r \ldots + F_1 + F_0 = 0$ l'équation de la courbe; F_r désigne une fonction homogène entière de degré r, entre les coordonnées de la courbe; soient s_r la combinaison des n segments pris r à r; Q un point pris sur la transversale et déterminé de manière qu'en faisant $OQ = q$, on ait la relation

$$\alpha_m s_{n-m} q^m + \alpha_{m-1} s_{n-m+1} q^{m-1} + \alpha_{m-2} s_{n-m+2} q^{m-2} + \ldots \alpha_0 s_n = 0,$$

où α_m, α_{m-1}, . . ., α_0 sont des constantes données et où m ne surpasse pas n; le lieu géométrique du point q est donné par l'équation

$$\alpha_m F_m - \alpha_{m-1} F_{m-1} + \alpha_{m-2} F_{m-2} + \ldots + \alpha_0 (-1)^m F_0 = 0.$$

Démonstration. La même que pour les surfaces et sera donnée plus loin.

5. *Théorème segmentaire général.* Mêmes données que dans le théorème précédent; mais la relation seg-

mentaire est celle-ci :

$$s_{n-m}q^m-(n-m+1)s_{n-m+1}q^{m-1}$$
$$+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2}s_{n-m+2}q^{m-2}+\ldots+s_n(-1)^m=0.$$

Le lieu du point Q est représenté par l'équation

$$F_m+(n-m+1)F_{m-1}+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2}F_{m-2}+\ldots$$
$$+\frac{(n-m+1)\ldots(n-1)n}{1.2.3\ldots m}F_0=0.$$

Corollaire. Les diamètres de Newton et la collinéation des centres harmoniques de Cotes et Mac-Laurin.

Démonstration. La même que pour les surfaces et sera donnée plus loin.

6. *Premier théorème de Newton sur les asymptotes.* Les n asymptotes coupent la corde en $n(n-2)$ points situés sur une ligne de degré $n-2$.

Démonstration, voir tome VII, pages 385 et 422.

7. *Second théorème de Newton sur les asymptotes.* Les n asymptotes rencontrent une transversale en n points dont le centre de moyenne distance est le même que le centre de moyenne distance des n points d'intersection de la courbe avec la transversale (voir *ibid.*).

8. *Théorème segmentaire de Mac-Laurin sur les tangentes.* Par un point O menons deux transversales; par les n points d'intersection de la première transversale, menons n tangentes qui rencontrent en n points la seconde transversale; le centre des moyennes harmoniques de ces n points de rencontre pris par rapport au point O, est le même que le centre des moyennes harmoniques des n points d'intersection de la seconde transversale avec la courbe, et pris aussi par rapport au point O.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la méthode per-

spective au théorème précédent; nous verrons d'ailleurs que ce théorème est l'énoncé géométrique d'un théorème analytique d'Euler généralisé par M. Jacobi.

Observation. Lorsque la seconde transversale ne rencontre pas la courbe, le théorème subsiste encore; le centre des moyennes harmoniques des n points d'intersection des n tangentes avec la seconde transversale est donné par l'intersection de cette transversale avec la droite des centres harmoniques.

9. *Théorème de M. Poncelet sur le faisceau tangentiel*. Un faisceau de tangentes partant d'un point touche la courbe en $n(n-1)$ points, et ces $n(n-1)$ points de contact sont sur une ligne de degré $n-1$, nommée *première polaire* du sommet du faisceau.

Démonstration, *voir* tome VII, page 311.

Corollaires. 1°. Par un point donné sur la courbe, on ne peut mener que $n(n-1)-2$ tangentes; car la tangente en ce point compte pour deux tangentes dirigées en sens opposés.

2°. On ne peut mener que $n(n-1)-2$ tangentes parallèles à une asymptote; car cette asymptote compte pour deux tangentes.

3°. On ne peut mener que $n(n-1)-2$ tangentes parallèles à une tangente dont le point de contact est un point d'inflexion; car cette tangente est *double*.

4°. Par un point d'inflexion on ne peut mener que $n(n-1)-3$ tangentes; car cette tangente au point d'inflexion compte pour *trois*.

10. *Théorème de MM. Cayley et Joachimsthal sur le faisceau tangentiel*. Le faisceau de tangentes partant d'un point coupe la courbe en $n(n-1)(n-2)$ points situés sur une ligne de degré $(n-1)(n-2)$; cette courbe et celle des points de contact ont $(n-1)(n-2)$ tangentes communes passant par le sommet du faisceau.

Démonstration, voir page 104.

11. *Théorème de M. Chasles sur les tangentes parallèles.* Lorsque le sommet du faisceau tangentiel est à l'infini, le centre des moyennes distance des $n(n-1)$ points de contact reste fixe, quelle que soit la direction des tangentes.

Démonstration, voir tome IV, page 153.

Observation. En appliquant la méthode perspective, on obtient un théorème sur des centres de moyennes harmoniques.

12. *Théorème sur les tangentes.* Une transversale coupant la courbe en n points, on mène en chacun de ces points une tangente, le système de ces n tangentes rencontre la courbe en $n(n-2)$ points, situés sur une ligne d'ordre $n-2$.

Démonstration. On projette la transversale à l'infini et l'on revient au théorème 6.

13. *Théorème sur les coefficients différentiels.* Une courbe algébrique de degré n étant rapportée à des axes rectilignes, le point de moyenne distance de tous les points où les coefficients différentiels d'un ordre *donné* sont égaux à un nombre donné, est un point fixe, quel que soit le nombre donné; mais ce point change avec l'ordre du coefficient différentiel et avec les axes; dernier changement qui n'a pas lieu lorsque le coefficient différentiel est du premier ordre.

Démonstration, voir tome IV, page 155.

14. *Théorème de M. Duhamel sur les centres de courbure.* Le centre de moyenne distance des $n(n-1)$ centres de courbure correspondant aux $n(n-1)$ points de contact des tangentes parallèles est le même que le centre de moyenne distance de ces points de contact.

Démonstration, voir tome IV, page 180.

15. *Théorème sur les polaires.* Les polaires de tous

les points d'une droite ont $(n-1)^2$ points en commun.

Démonstration. Soit $U=0$ l'équation de la courbe rendue homogène $\left(\text{en prenant pour coordonnées } \frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$; soient $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ les coordonnées du sommet d'un faisceau tangentiel; l'équation de la polaire de ce faisceau est, comme on sait,

$$a\frac{dU}{dx}+b\frac{dU}{dy}+c\frac{dU}{dz}=0.$$

Si le sommet est sur une droite, on a

$$c=pa+qb,$$

p et q étant des constantes; donc l'équation de la polaire est

$$a\left(\frac{dU}{dx}+p\frac{dU}{dz}\right)+b\left(\frac{dU}{dy}+q\frac{dU}{dz}\right)=0.$$

On satisfait à cette équation, en posant

$$\frac{dU}{dx}+p\frac{dU}{dz}=0,\quad \frac{dU}{dy}+q\frac{dU}{dz}=0:$$

ces deux lignes, chacune de degré $n-1$, se coupent en $(n-1)^2$ points; donc, etc.

16. *Théorème de M. Plücker sur les points multiples.* Si une ligne de degré n a des points multiples, ils se trouvent sur une ligne de degré $n-1$.

Démonstration, voir tome VII, page 423.

17. *Théorème.* Par un point donné, on mène n droites aux n points d'intersection d'une transversale avec la courbe; ce faisceau coupera la courbe encore en $n(n-1)$ points situés sur une ligne d'ordre $n-1$.

Démonstration. Premier cas. *Le point donné est à l'infini.* Le faisceau est formé de droites parallèles, de direction connue. Donnons cette direction à l'axe des y,

et prenons la transversale pour axe des x; l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme $Py + Q = 0$, P étant une fonction de x et de y, de degré $n-1$, et Q une fonction de x seulement et de degré n. Cette équation est satisfaite, en posant

$$Q = 0, \quad P = 0;$$

or $Q = 0$ représente le faisceau des droites parallèles, et ce faisceau rencontre la courbe en un nombre de points $n(n-1)$ placés sur la courbe de degré $n-1$, représentée par $P = 0$.

Second cas. *Le point est à une distance finie.* On projette ce point à une distance infinie, et le premier cas se reproduit.

18. *Théorème.* Une courbe de degré n ne peut avoir plus de $n(n-1)^2$ points *doubles*.

Démonstration. Soit $\varphi = 0$ l'équation en x, y de la courbe; m étant le coefficient angulaire d'une tangente, on a

$$m = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}.$$

Au point double on doit avoir deux valeurs pour m; ce qui n'est possible que si

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Ces deux équations sont chacune de degré $n-1$, et $\varphi = 0$ est de degré n; donc, etc.

En appliquant la méthode connue pour déterminer la valeur de l'expression $\frac{0}{0}$, on trouve que les deux valeurs

de m sont données par l'équation suivante :

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}m^2 + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}m + \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0.$$

Il y a trois cas à distinguer : 1° les deux racines sont réelles et inégales ; deux branches réelles passent par le *point double*, et chaque branche a une tangente distincte : 2° les deux racines sont égales ; deux branches réelles passent par le point, et les deux tangentes se confondent en une seule : c'est un point double de rebroussement : 3° les deux racines sont imaginaires ; le point double est isolé.

19. *Théorème.* Le nombre de points de rebroussement ne surpasse pas $2n(n-2)$, et ces points se trouvent sur une ligne de degré $2(n-2)$.

Démonstration. Pour que l'équation du second degré en m, rapportée ci-dessus, ait deux racines égales, on doit voir

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2\varphi}{dy^2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0;$$

équation de degré $2(n-2)$. Donc, etc.

20. *Théorème.* Lorsqu'une courbe de degré n a un point double, non de rebroussement, le nombre de tangentes qu'on peut mener par un point donné à cette courbe se réduit à $n(n-1)-2$.

Démonstration. Supposons d'abord un faisceau de tangentes parallèles, et soit m le coefficient angulaire ; on a

$$(1) \qquad m\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dx} = 0.$$

Cette équation, de la polaire d'un point situé à l'infini sur une droite de direction m, représente la courbe dont les $n(n-1)$ points d'intersection avec la courbe donnée sont tels, qu'en menant par chacun de ces points une

parallèle ayant la direction donnée, cette parallèle a un *point double* en commun avec la courbe; donc le point double déterminé par les équations

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} = 0,$$

doit se trouver sur la courbe (1), et c'est ce qui est évident. Mais la droite qui passe par ce point double, quoique ayant deux points en commun avec la courbe, n'est pas une *tangente;* il faut donc retrancher ce double point du nombre des $n(n-1)$ points qui donnent de véritables tangentes: ainsi le nombre de ces tangentes ne peut dépasser $n(n-1)-2$. Si le sommet du faisceau tangentiel est à une distance finie, on le ramène, par la projection perspective, au cas précédent.

Observation. Toute courbe peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'une droite mobile dont elle est l'enveloppe. Il n'y a de tangentes que les droites sur lesquelles vient s'appliquer la droite mobile.

21. *Théorème.* Si la courbe de degré n a un point double de rebroussement, le faisceau tangentiel a $n(n-1)-3$ tangentes.

Démonstration. Dans ce cas, la polaire d'un point situé à l'infini passe par le point double, et touche la courbe donnée en ce point; par conséquent, *trois* des $n(n-1)$ points d'intersection se réunissent au point de contact, et, comme ces points ne donnent pas de tangentes, il s'ensuit que le nombre de tangentes se réduit à $n(n-1)-3$.

22. *Théorème.* Dans une ligne de degré n, les points d'inflexion sont sur une ligne d'ordre $3n-4$.

Démonstration. Au point d'inflexion, le coefficient angulaire $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ atteint une valeur extrême, maximum ou minimum; en d'autres termes, la tangente *rebrousse.*

D'après la propriété connue, appartenant aux valeurs extrêmes, le coefficient différentiel du second ordre $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ doit être nul aux points d'inflexion; comme ce coefficient différentiel forme le dénominateur du rayon de courbure, on en conclut que le rayon de courbure est infini, ou bien que le cercle de courbure se réduit à une droite, qui est la tangente elle-même : de sorte que cette droite à trois points en commun avec la courbe, est une tangente *osculatrice*. Ne nous occupant que de généralités, il est bien entendu que nous faisons abstraction des diverses circonstances qui modifient la théorie des valeurs extrêmes. Cela posé, soit $F = 0$ l'équation de degré n d'une courbe plane. La dérivée première est

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0, \quad \text{où} \quad y' = \frac{dy}{dx};$$

la dérivée seconde, après qu'on y a fait $y'' = 0$, devient

$$2\frac{d^2F}{dx\,dy}y' + \frac{d^2F}{dx^2} + y'^2\frac{d^2F}{dy^2} = 0;$$

éliminant y', on obtient

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2F}{dy^2}\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 - 2\frac{dF}{dy}\frac{dF}{dx}\frac{d^2F}{dx\,dy} + \frac{d^2F}{dx^2}\left(\frac{dF}{dy}\right) = 0.$$

Telle est l'équation aux différences partielles à laquelle doivent satisfaire les coordonnées d'un point d'inflexion, et cette équation est de degré $3n - 4$; donc, etc.

Corollaire. Le nombre de points d'inflexion ne peut dépasser $3n^2 - 4n$.

23. Lemme. F *étant une fonction entière en* x, y *de degré* n, *et* p *une fonction linéaire des mêmes variables; si l'expression* (A) *aux différences partielles est divisible par* F, *en remplaçant* F *par* pF, *de degré* $n + 1$, *le résultat sera divisible par* pF.

Démonstration. Faisons $pF = f$; on a

$$\frac{df}{dx} = F\frac{dp}{dx} + p\frac{dF}{dx},$$

$$\frac{df}{dy} = F\frac{dp}{dy} + p\frac{dF}{dy},$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2\frac{dF}{dx}\frac{dp}{dx} + p\frac{d^2F}{dx^2},$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = 2\frac{dF}{dy}\frac{dp}{dy} + p\frac{d^2F}{dy^2},$$

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} = \frac{dF}{dy}\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dy}\frac{dF}{dx} + p\frac{d^2F}{dx^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - 2\frac{df}{dy}\frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{df}{dy}\right)^2,$$

on obtient un résultat de la forme

$$p^3A + p^2FM + pFN.$$

La quantité indépendante de p s'anéantit; M et N sont des fonctions entières. Or A est divisible par F; donc l'expression est divisible par pF.

24. Lemme. F *étant le produit de n facteurs linéaires en x, y, l'expression* (A), *de degré* $3n-4$, *est toujours divisible par* F.

Démonstration. Soit $F = pq$, p et q étant deux fonctions *linéaires*; l'expression (A) devient

$$pq\left(\frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}\right)^2:$$

donc (A) est divisible par pq. La proposition étant vraie pour deux facteurs, elle sera également vraie, d'après le lemme précédent, pour trois facteurs, etc.

25. *Théorème*. Dans les $n(3n-4)$ points d'inflexion, il y en a toujours $2n$ situés à l'infini, et les $3n(n-2)$

points d'inflexion restants sont sur une ligne de degré $3(n-2)$.

Démonstration. Soit $F=0$ l'équation de la courbe de degré n, et $U_n=0$ l'équation des n asymptotes; comme on sait, F a la forme $F=U_n+U_{n-2}=0$, où U_{n-2} est une fonction de degré $n-2$. U_n est un produit de n facteurs linéaires; donc, dans le calcul de l'équation (A) de degré $3n-4$, l'ensemble des termes qui proviennent de U_n seulement peut, d'après le lemme précédent, se mettre sous la forme $U_n V_{2n-4}$, et il est facile de s'assurer que les autres termes ne dépassent pas le degré $3n-6$; donc l'équation (A) prend cette forme :

$$U_n V_{2n-4}+V_{3n-6}=0.$$

Faisant $U_n=0$, le degré de cette équation s'abaisse de deux unités; donc la courbe des points d'inflexion a n asymptotes en commun avec la courbe donnée. Parmi les intersections de la courbe des points d'inflexion avec la courbe donnée, il y a donc $2n$ points situés à l'infini; éliminant U_n, on obtient

$$U_{n-2} V_{2n-4}=V_{3n-6}:$$

équation de degré $3(n-2)$ qui représente une courbe de ce degré, et dont les intersections avec la courbe donnée indiquent les points d'inflexion, réels ou imaginaires.

Les courbes du troisième degré ont quinze points d'inflexion, dont six sont à l'infini, et parmi les neuf restants, nous verrons qu'il y en a au moins six d'imaginaires et trois réels et en ligne droite.

26. *Théorème*. La polaire réciproque d'une courbe de degré n, a $3n(n-2)$ points de rebroussement.

Démonstration. La courbe a $3n(n-2)$ points d'inflexion et autant de tangentes de rebroussement; par conséquent, la polaire réciproque a autant de points de rebroussement.

27. *Théorème*. Une courbe de degré n a

$$\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$$

tangentes doubles.

Démonstration. Soit P une courbe de degré n, et P_1 sa polaire réciproque de degré $n_1 = n(n-1)$; le faisceau tangentiel à P_1 doit généralement renfermer $n_1(n_1-1)$ tangentes (9). Mais P_1 étant la polaire réciproque de P, il s'ensuit que le faisceau tangentiel de P_1 ne renferme réellement que n tangentes; le nombre de tangentes perdues se monte donc à $n_1(n_1-1) - n = n^3(n-2)$. La polaire P_1 a $3n(n-2)$ points de rebroussement (26); pour chacun de ces points, le faisceau perd trois tangentes (21) (*); le nombre de tangentes perdues est donc $9n(n-2)$. Or $n^3(n-2) - 9n(n-2) = n(n-2)(n^2-9)$. Ces tangentes disparues proviennent des points doubles dont chacun fait disparaître deux tangentes (19); il y a donc dans la courbe P_1 un nombre de points doubles exprimé par

$$\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9);$$

il y a donc autant de tangentes *doubles* dans la courbe P, c'est-à-dire de tangentes touchant la courbe en deux points distincts.

Observation. Cette démonstration *indirecte* n'est pas entièrement satisfaisante. Elle est de M. Plücker, ainsi que tous les théorèmes précédents à partir du § 18; on les trouve dans l'ouvrage du célèbre professeur, publié à Berlin en 1835 sous ce titre : *System der Analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweise gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der curven dritter Ordnung enthaltend :* Système de géométrie ana-

(*) Cette observation a déja été faite par M. Poncelet.

lytique, fondée sur de nouvelles considérations, et comprenant en particulier une théorie complète des courbes du troisième ordre; par M. le docteur Julius Plücker, professeur à l'Université de Halle, in-4° de 266 pages. Nous donnerons cette théorie incessamment. (*Suite.*)

THOÉRÈME DE MAC-CULLAGH (*) SUR LE TRIANGLE INSCRIT DANS L'ELLIPSE.

1. *Lemme.* Soient une ellipse ayant pour grand axe AB, et une demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre, dans le même plan; soient M, N deux points sur l'ellipse; M′, N′ deux points projectivement correspondants sur la demi-circonférence. Par le centre O, menons le demi-diamètre OP parallèle à la corde MN, nous aurons la proportion

$$\text{corde MN} : \text{corde M}'\text{N}' :: \text{OP} : \text{OA}.$$

Démonstration. Par le point M, menons une parallèle à la corde M′N′, et soit Q le point où cette parallèle rencontre la droite NN′; P′ étant le point projectivement correspondant de P, joignons O et P′; OP′, projection de OP, est donc parallèle à M′N′ ou à MQ; les deux triangles QMN et P′OP sont donc semblables, comme ayant les côtés parallèles. Comparant les côtés homologues, on obtient

$$\text{MN} : \text{MQ} :: \text{OP} : \text{OP}';$$

or

$$\text{MQ} = \text{M}'\text{N}', \quad \text{OP}' = \text{OA};$$

donc, etc.

2. *Lemme.* L'aire d'un triangle inscrit dans une ellipse est égale au produit des trois côtés multiplié par

---

(*) Prononcez *Maccol.*

le produit des deux demi-axes et divisé par quatre fois le produit des trois demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle.

Démonstration. Soient LMN un triangle inscrit dans une ellipse et L′M′N′ le triangle projectivement correspondant dans la circonférence décrite sur le grand axe de l'ellipse; faisons $LM = n$, $MN = l$, $NL = m$, $M'L' = n'$, $M'N' = l'$, $N'L' = m'$; et soient a le demi-grand axe et b le demi-petit axe; λ, μ, ν les demi-diamètres respectivement parallèles aux côtés MN, LN, LM : on a, en vertu du lemme précédent,

$$l' = \frac{al}{\lambda}, \qquad m' = \frac{am}{\mu}, \qquad n' = \frac{an}{\nu};$$

d'où

$$l'm'n' = \frac{a^3 lmn}{\lambda\mu\nu} = 4a\,S' = \frac{4a^2}{b}\,S;$$

et de là

$$S = \frac{ab.lmn}{4\lambda\mu\nu}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3. Théorème. *Un triangle étant inscrit dans une ellipse, le rayon du cercle circonscrit au triangle est égal au produit des trois demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle, et divisé par le produit des deux demi-axes.*

Démonstration. Conséquence immédiate du lemme précédent.

Corollaire. Lorsque les trois sommets du triangle se réunissent, on obtient pour la valeur du rayon de courbure le cube du demi-diamètre parallèle à la tangente, divisé par le produit des deux demi-axes; expression connue.

Observation. M. Joachimsthal a énoncé et démontré ce théorème en avril 1849 (Crelle, t. XXXIX, p. 138; en français); mais ce même théorème avait déjà été publié par feu le professeur Mac-Cullagh, dans le *Dublin Universit. Calendar*, an. 1837, et a été démontré dans le

Traité des sections coniques de M. Georges Salmon, savant professeur de la même Université. Mac-Cullagh a, de plus, donné l'énoncé suivant du même théorème, qui le rend applicable à la parabole :

« Le carré du rayon du cercle circonscrit est égal au » produit des trois cordes passant par le foyer parallèle- » ment aux côtés du triangle, divisé par quatre fois le » paramètre de la conique ». Ce qui est évident, puisqu'une corde passant par le foyer est égale au double du carré du demi-diamètre parallèle, divisé par le demi-grand axe. Ce renseignement est consigné dans une Lettre de M. le professeur Salmon à M. Crelle (t. XXXIX, p. 365, 11 février 1850; en français). Le théorème est encore à démontrer pour l'hyperbole.

QUESTIONS.

228. Les trois sommets A, B, C d'un triangle et les trois sommets A', B', C' d'un tétraèdre sont donnés ; par un point quelconque M dans le plan du triangle ABC, on mène les droites MA, MB, MC ; on prend dans l'espace un point S tel, que dans le tétraèdre SA'B'C' on ait

$$SA' = MA; \quad SB' = MB; \quad SC' = MC;$$

le lieu du point S est une surface du second degré.

(JACOBI.)

229. Soient une sphère et deux points quelconques dans l'espace ; les distances des points au centre de la sphère sont entre elles comme les distances respectives de chacun de ces points au plan polaire de l'autre point : plans polaires pris par rapport à la sphère.

(GEORGE SALMON.)

SOLUTION DE LA QUESTION 88

(voir t. III, p. 376);

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Trois circonférences étant tracées sur un même plan, on propose de trouver sur ces circonférences, en ne faisant usage que du compas, *trois points qui soient les sommets d'un triangle équilatéral.* (E. PROUHET.)

Appelons P, Q, R (*) les trois circonférences données. D'un point quelconque p de la première, avec une ouverture de compas arbitraire, décrivez un arc qui coupe la seconde circonférence en q, puis de p et de q comme centres, avec la même ouverture de compas, décrivez des arcs qui se coupent en r. Ce dernier point sera le sommet d'un triangle équilatéral ayant pour côté pq. Si l'on construit de la même manière d'autres triangles équilatéraux $pq'r'$, $pq''r''$... ayant un sommet commun en p sur la circonférence P, et leurs sommets q', q''... sur la circonférence Q, le lieu géométrique des points r, r', r''... sera une circonférence de cercle, égale à Q; son centre, celui de Q et le point p étant les sommets d'un triangle équilatéral. Par suite de cette propriété, dont la démonstration est extrêmement facile, si le centre de Q est donné, on trouvera, en construisant ce triangle, le centre de la circonférence $rr'r''$..., de sorte que l'on pourra la décrire avec le compas. Les points où elle rencontrera la troisième circonférence R seront les sommets

---

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

des triangles équilatéraux demandés. Le sommet p étant pris à volonté, on voit que le problème est indéterminé.

Si les centres des circonférences P, Q, R ne sont pas donnés immédiatement, la construction sera modifiée comme il suit.

Ayant déterminé trois points r, r', r'' au moyen de la construction indiquée ci-dessus, faites passer par ces points une circonférence de cercle, en ne faisant usage que du compas, problème résolu dans la *Géométrie du compas* de Mascheroni (livre X, n° 150). On peut encore trouver le centre de l'une quelconque des circonférences tracées, en s'astreignant à la même condition, problème également résolu par cet auteur (livre X, n° 143), et alors le centre de la circonférence $r r' r''$... se construit comme on l'a expliqué en premier lieu.

PROBLÈME. *Quels sont, sur la circonférence* P, *les points qui fournissent des solutions de la question de* M. Prouhet?

Supposons que pour chaque point p de P on opère comme il a été dit ci-dessus, on aura une série de circonférences égales à Q, lesquelles donneront ou ne donneront pas de solutions suivant qu'elles couperont ou ne couperont pas R. Le lieu de leurs centres sera, ainsi qu'il est aisé de le voir, une circonférence égale à P, son centre formant, avec ceux de P et de Q, un triangle équilatéral. D'après cela, les arcs de cette circonférence interceptés entre les deux circonférences concentriques à R, que l'on obtient en augmentant et diminuant le rayon de celle-ci du rayon de Q, fourniront toutes les solutions qui se rapportent à la disposition adoptée pour les triangles équilatéraux. Il y aura, en général, deux arcs, égaux entre eux, qui se reporteront en vraie grandeur sur P en les faisant tourner de l'angle du triangle équilatéral autour du centre de Q, et les points de ces arcs répondront

seuls à la question. En adoptant une disposition symétrique, on pourra, selon les cas, trouver d'autres arcs, séparés ou réunis en un seul.

La recherche de ces arcs peut s'effectuer en ne faisant usage que du compas. Pour cela, il suffit de savoir décrire les deux circonférences concentriques à R, ou de construire avec le compas seul la somme et la différence de deux droites (Mascheroni, livre IV, n°s 72 et 73).

Note. Pour éviter aux lecteurs des *Nouvelles Annales* la peine de recourir à l'ouvrage de Mascheroni, je vais rappeler succinctement en quoi consistent les solutions dues à ce géomètre.

I. *Trouver le centre de la circonférence déterminée par trois points* r, r', r''.

Des points r, r', avec une ouverture de compas suffisante, décrivez deux arcs qui se coupent en A et B. Des points r' et r'' décrivez également deux arcs qui se coupent en C et D; on sait que le centre cherché est au point de rencontre des deux droites AB, CD.

Ces droites ne pouvant être tracées, puisque l'on ne fait usage que du compas, la solution ordinaire n'est plus admissible; on la remplace par celle que voici :

Des points A et B, avec les rayons AC, BC, décrivez deux arcs qui se coupent en c, point symétrique de C relativement à AB. Construisez semblablement le point d, symétrique de D relativement à AB. L'intersection des droites CD, cd sera le centre demandé. Or cette intersection O divise CD dans le rapport des longueurs Cc, Dd, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathrm{OC} : \mathrm{OD} :: \mathrm{C}c : \mathrm{D}d,$$

d'où

$$\mathrm{OC} : \mathrm{CD} :: \mathrm{C}c : \mathrm{C}c + \mathrm{D}d.$$

OC est donc une quatrième proportionnelle aux lon-

gueurs $Cc + Dd$, Cc, CD, et il faut construire cette ligne avec le compas seul.

On remarquera que l'addition des deux longueurs Cc, Dd avec le compas seul, est un problème qui doit être préalablement résolu. A cet effet, des centres c et D, avec les rayons CD, Cc, décrivez deux arcs qui se coupent en d'; la figure $Ccd'D$ sera un parallélogramme, et les deux droites dD, Dd', étant parallèles à Cc, tomberont dans le prolongement l'une de l'autre, de sorte qu'on aura

$$dd' = Cc + Dd.$$

Cela posé, d'un point pris à volonté, avec les rayons dd' et Cc, tracez deux circonférences concentriques, et inscrivez dans la première une corde àgale à CD. Des extrémités de cette corde, avec un rayon arbitraire, coupez la seconde circonférence en deux points; la distance de ces derniers sera égale à OC, c'est-à-dire quatrième proportionnelle aux deux rayons et à la corde CD. Cela résulte de ce que les déplacements simultanés des divers points d'une droite de longueur constante, dont les extrémités parcourent deux circonférences concentriques, sont vus, du centre commun, sous des angles égaux.

Connaissant donc la longueur OC, si des points C, c on décrit des arcs avec ce rayon, leur intersection donnera le centre O.

II. *Une circonférence étant tracée, trouver son centre.*

Soient E, F deux points pris à volonté sur la circonférence. De F comme centre, avec le rayon EF, tracez une nouvelle circonférence qui coupe la première en H, et déterminez la seconde extrémité G du diamètre EF en inscrivant consécutivement trois cordes égales au rayon EF. Des points F et G, avec le rayon GH, décrivez des arcs qui se coupent en I, et de ce dernier point comme centre,

avec le rayon GH, coupez la seconde circonférence en K; la corde EK sera le rayon de la circonférence donnée.

Pour le démontrer, il suffit de prouver qu'en décrivant des points E, F des arcs qui se rencontrent en L, on a

$$LH = LF,$$

c'est-à-dire que le point L est également distant des trois points E, F, H de la circonférence, propriété qui n'appartient qu'au centre.

On a l'angle

$$IFE = GIF + IGF.$$

Les deux triangles IFG, IFK sont égaux comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun; de plus ils sont isocèles, de sorte que l'angle IGF = IFK. Retranchant des deux membres de l'égalité ci-dessus IFK, il vient

$$EFK = FIK.$$

Le triangle FEK, étant isocèle par construction de même que IFK, est semblable à ce dernier, et l'on a

$$IF : FK :: FK : EK,$$

ou

$$HG : GF :: EF : EL,$$

puisque, par construction,

$$IF = HG, \quad FK = GF = EF, \quad EK = EL.$$

Les deux triangles FGH, LEF étant isocèles, et ayant leurs côtés proportionnels, sont semblables entre eux, et, par suite, l'angle LFE = FGH. Mais HFE = 2FGH; retranchant des deux termes de cette égalité respectivement les angles égaux LFE, FGH, il vient

$$LFH = FGH,$$

de sorte que l'angle LFH = LFE. Les deux triangles

LFE, LFH ayant ainsi un angle égal, le côté LF commun, et le côté FH = FE, sont égaux entre eux, et par conséquent LH = LE, ce qu'il fallait démontrer.

III. *Étant données deux lignes droites* ST, UV, *constuire une troisième droite égale à leur somme ou à leur différence.*

On décrit de l'extrémité S de l'une de ces lignes, avec UV pour rayon, une circonférence qui rencontre la première en deux points dont les distances au point T sont la somme et la différence cherchées. Pour découvrir ces points, coupez de T, avec un rayon arbitraire, la circonférence en deux points m, n. Le problème revient évidemment à construire les milieux des deux arcs ainsi déterminés.

Des points m, n décrivez, avec le rayon UV, à partir du centre S, des arcs Sn', Sm' égaux l'un et l'autre à l'arc mn. Des centres m', n', avec les rayons $m'm$, $n'n$, décrivez deux arcs qui se coupent en t. Enfin des mêmes centres, avec le rayon St, décrivez deux arcs : ils se couperont aux points cherchés.

En effet, les figures $Sn'mn$, $Sm'nm$ sont, par construction, des parallélogrammes, et $m'Sn'$ est une perpendiculaire à ST. Le carré de la distance du point S à l'un quelconque des points trouvés ci-dessus a pour valeur

$$\overline{St}^2 - \overline{Sm'}^2 = \overline{m'm}^2 - 2\overline{Sm'}^2 = \overline{Sm}^2 = \overline{UV}^2.$$

Ce qui prouve que ces points satisfont bien à la question (*).

(*) Voir *Manuel de géométrie*, 2e édition, appendice. TM.

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN CARRÉ EN DEUX AUTRES;

PAR M. VOLPICELLI,
Professeur à l'Université de Rome.

En représentant par z un produit de k facteurs, tous différents entre eux, et chacun égal à la somme des deux carrés, les solutions entières de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

se divisent en k espèces différentes. Les solutions comprises dans la première espèce sont au nombre de k; et chacune d'elles admet $k - 1$ facteurs communs avec z; celles de la deuxième espèce sont au nombre de

$$\frac{2k(k-1)}{1.2},$$

et ont chacune $k - 2$ facteurs communs avec z; et, de la même manière, le nombre de celles qui forment la troisième espèce est donné par

$$\frac{2^2 k(k-1)(k-2)}{1.2.3},$$

dont chacune admet $k - 3$ facteurs communs avec z; et ainsi de suite, jusqu'à la dernière espèce, qui se composera de 2^{k-1} solutions, aucune n'ayant de facteurs communs avec z.

Le nombre total de ces solutions, qu'on obtient en sommant les termes du polynôme

$$2^0 k + \frac{2^1 k(k-1)}{1.2} + \frac{2^2 k(k-1)(k-2)}{1.2.3} + \ldots + 2^{k-2} k + 2^{k-1},$$

sera évidemment

$$\frac{3^k - 1}{2}.$$

Cette expression correspond à celle qu'on a en faisant

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 2$$

dans la formule que donne M. Gauss (*), pour assigner le nombre de décompositions en deux carrés d'un entier quelconque qui admet une telle décomposition.

Quant à la forme des solutions, pour le moment nous dirons seulement que les k valeurs des inconnues x, y, qui appartiennent à la première espèce, s'expriment, en général, de la manière suivante :

$$x = (a_\gamma^2 - b_\gamma^2)\frac{z}{a_\gamma^2 + b_\gamma^2}, \qquad y = 2a_\gamma b_\gamma \frac{z}{a_\gamma^2 + b_\gamma^2},$$

en observant que l'indice γ doit recevoir successivement toutes les valeurs comprises depuis 1 jusqu'à k, et ayant pris, par hypothèse,

$$z = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)\ldots(a_k^2 + b_k^2).$$

Exemple. L'équation

$$x^2 + y^2 = 1105^2 = (5.13.17)^2,$$

dans laquelle on a

$$k = 3,$$

admet

$$\frac{3^k - 1}{2} = 13$$

solutions différentes, divisées en trois espèces. Les trois solutions de la première espèce sont :

$$x = \begin{cases} 975 = 5.13.15 \\ 663 = 17.13.\ 3 \\ 425 = 17.\ 5.\ 5 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 520 = 5.13.\ 8 \\ 884 = 17.13.\ 4 \\ 1020 = 5.17.12 \end{cases}$$

(*) *Disquisitiones arithmeticæ*. Lipsiæ, 1801, p. 219.

Les six solutions de la deuxième espèce sont :

$$x = \begin{cases} 561 = 17.\ 33 \\ 105 = 5.\ 21 \\ 169 = 13.\ 13 \\ 1001 = 13.\ 77 \\ 855 = 5.171 \\ 1071 = 17.\ 63 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 952 = 17.\ 56 \\ 1100 = 5\ 220 \\ 1092 = 13.\ 84 \\ 468 = 13.\ 36 \\ 700 = 5.140 \\ 272 = 17.\ 16 \end{cases}$$

Enfin les quatre solutions de la troisième espèce sont :

$$x = \begin{cases} 47 \\ 943 \\ 817 \\ 1073 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 1104 \\ 576 \\ 744 \\ 264 \end{cases}$$

Note. La formule générale des *Disquisitiones* citée ci-dessus s'énonce ainsi : Tout nombre entier donné peut se mettre sous la forme $2^\mu S a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$; μ est un nombre entier positif, qui devient égal à zéro lorsque le nombre est impair; S est le produit de tous les diviseurs premiers de la forme $4n+3$; et lorsqu'il n'existe pas de diviseurs de cette forme, on fait $S=1$; a, b, c, etc., sont des diviseurs premiers de la forme $4n+1$; α, β, γ, etc., sont des exposants entiers; s'il n'existe aucun diviseur de cette forme, la décomposition est impossible. Il y a encore impossibilité si S n'est pas un nombre carré. Ces cas exclus, si tous les exposants α, β, γ, etc., sont pairs, le nombre des solutions est

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots-1}{2};$$

si ces exposants ne sont pas tous pairs, le nombre des solutions est

$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ \ldots}{2}.$$

Nous accueillerons avec reconnaissance une démonstration de cette belle formule.

Dans l'endroit cité, on lit $+\frac{1}{2}$ au lieu de $-\frac{1}{2}$. On sait que les *Disquisitiones*, imprimées loin de l'auteur, fourmillent de fautes typographiques; ce qui n'a rien de surprenant. Mais il est extrêmement surprenant que l'ouvrage de génie le plus extraordinaire de notre siècle, il date de 1801, n'ait pas encore une seconde édition, soignée, de luxe, in-4°; la traduction française en est peut-être cause. Espérons que l'Allemagne fera un jour pour les œuvres de l'illustre directeur de l'observatoire de Gottingue, ce que l'Angleterre a fait pour Newton et la France pour Fermat et Laplace. Les contemporains devraient même devancer la postérité : il est des hommes pour lesquels celle-ci commence dès leur vivant.

GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE

(voir t. IX, p. 142);

PAR M. STREBOR.

---

6. Considérons la courbe sphérique, lieu d'un point tel que, si l'on mène de là des arcs de grands cercles à deux points fixes, le produit des sinus (ou des tangentes trigonométriques) des demi-arcs soit constant, et qu'il n'excède pas le carré du sinus (ou de la tangente trigonométrique) de la quatrième partie de l'arc de grand cercle qui joint les deux points fixes : la courbe dont il s'agit sera située sur un cône du second degré.

7. Dans le cas où l'on prend les sinus, la somme et la différence des arcs, déterminés sur la courbe par un grand cercle issu du point, milieu de la distance entre les deux points fixes, s'expriment toutes les deux par des fonctions

elliptiques de première espèce, d'une manière précise, sans aucune addition.

Et dans le cas des tangentes, la somme et la différence des arcs qu'on obtient de la même manière s'expriment semblablement par des fonctions de troisième espèce, à modules complémentaires.

Dans les deux cas, les périmètres entiers s'expriment par une seule fonction complète.

8. Deux hyperboles équilatères sphériques de première espèce, tangentes à une sphéro-conique donnée et concentriques avec elle, font des angles égaux avec la conique homofocale qui passe par leur point d'intersection.

9. Étant données deux cassinoïdes sphériques homofocales (tome VII, page 136), une hyperbole équilatère sphérique (de première espèce) quelconque, concentrique avec les cassinoïdes et tangente à l'intérieure, coupera l'extérieure sous un angle constant.

10. En regardant une sphéro-lemniscate (de seconde espèce) comme la première d'une série de courbes se succédant d'après la loi indiquée à la question 101 (tome VIII, page 107), l'équation de la même courbe, entre les coordonnées polaires sphériques ρ et ω, sera

$$\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\rho\right)^{\frac{2}{2n-1}} = (\operatorname{tang}\alpha)^{\frac{2}{2n-1}}\cos\left(\frac{2\omega}{2n-1}\right).$$

11. Trouver les théorèmes de géométrie sphérique, analogues à ceux qui sont compris dans l'énoncé de la question 177 (tome VII, page 45).

NOUVELLE EXPRESSION DE L'AIRE D'UNE SURFACE;

PAR M. STREBOR.

Soit R la perpendiculaire qu'on abaisse d'un point fixe sur un plan tangent quelconque à une surface donnée, et soient θ, φ les angles qui déterminent la position de cette droite. En posant, pour abréger,

$$L = R\sin\theta + \frac{dR}{d\theta}\cos\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d^2R}{d\varphi^2},$$

$$M = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dR}{d\varphi} - \frac{d^2R}{d\theta\, d\varphi},$$

$$N = R + \frac{d^2R}{d\theta^2};$$

l'aire de la surface dont il s'agit aura pour expression

$$\int\int\left(LN - \frac{M^2}{\sin\theta}\right) d\theta\, d\varphi.$$

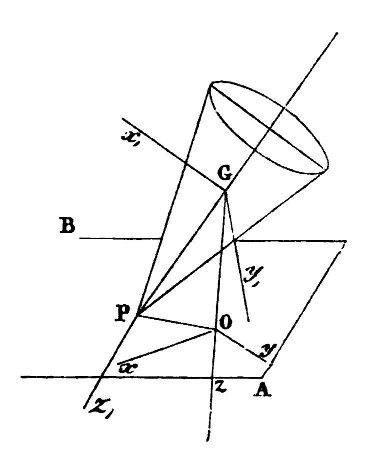
Cette formule doit trouver place dans les traités élémentaires.

NOTE SUR LA TOUPIE;

PAR M. FINCK,
Professeur.

La toupie peut être regardée comme un cône droit homogène, pesant, appuyé par son sommet P (*fig.* 1) sur un plan horizontal. On place ce corps de façon que son axe PG fasse, avec la verticale, un angle α, et on lui imprime une vitesse horizontale dont la direction ne passe pas par le centre de gravité G.

Fig. 1



Ce point sera animé, parallèlement au plan fixe, d'un mouvement rectiligne uniforme; de plus, il aura un mouvement vertical, dans la détermination duquel on peut faire abstraction du mouvement horizontal : ce qui revient à considérer le mouvement initial comme dû à un couple.

Soit R la résistance du plan; Gz_1 est un axe principal. Soient Gx_1, Gy_1 deux autres axes principaux. O étant la projection de G sur le plan fixe, on prendra pour axes fixes la verticale Oz, prolongement de GO, et les droites Ox, Oy menées dans le plan AB. Si l'on pose $PG = \beta$, comme l'angle $PGO = \alpha$, GO sera $\beta \cos \alpha$, que je nomme γ.

A, B, C sont les trois moments d'inertie, C étant relatif à Gz_1, et, par suite, $B = A$.

La vitesse angulaire est ω; p, q, r sont ses composantes par rapport à Gx_1, Gy_1, Gz_1. Comme les moments de R et du poids de la toupie par rapport à Gz_1 sont nuls, l'équation du mouvement de rotation autour de Gz_1 est

$$dr = 0, \quad \text{d'où} \quad r = n, \quad n \text{ étant une première constante.}$$

Soient M la masse de la toupie, gM son poids ($g = 9^m,80$); soient a, b, c les cosinus des angles que Oz fait avec les x_1, y_1, z_1; la somme des moments des quantités de mouvement, par rapport à Oz, est

$$Aap + Bbq + Ccr,$$

quantité constante, vu que R et gM sont parallèles à Oz. Donc, à cause de $r = n$,

$$(1) \qquad Aap + Bbq + Ccn = l.$$

Je désigne par v la vitesse du centre de gravité, par z son ordonnée; le principe des forces vives donne

$$(2) \qquad A(p^2 + q^2) + Cn^2 + Mv^2 = 2gMz + \text{constante}.$$

Soit GO $= \zeta$; d'où $z = -\zeta$. Je supposerai nulles les valeurs initiales de p, q; la valeur initiale de ζ est γ, celle de v est zéro; donc $l = Cn\cos\alpha$, vu que OGP $= \alpha$ au commencement

$$\text{constante} = Cn^2 - 2gM\gamma.$$

On connaît les angles φ, ψ, θ, qui donnent

$$a = \sin\theta\sin\varphi, \quad b = \sin\theta\cos\varphi, \quad c = \cos\theta,$$

$$pdt = \sin\varphi\sin\theta\, d\psi + \cos\varphi\, d\theta,$$

$$qdt = \cos\varphi\sin\theta\, d\psi - \sin\varphi\, d\theta.$$

Ces dernières formules se démontrent fort simplement par la décomposition des rotations.

Comme, de plus, $v = \frac{d\zeta}{dt}$, l'équation (1) devient

$$A\beta\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} + Cn(\zeta - \gamma) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{vu que } \cos\theta = \frac{\zeta}{\beta}, \\ \sin^2\theta = \frac{\beta^2 - \zeta^2}{\beta^2}, \end{array} \right.$$

et l'équation (2) devient, après élimination de $d\psi$,

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2}[A + M(\beta^2 - \zeta^2)] + \frac{C^2 n^2 (\zeta - \gamma)^2}{A} + 2gM(\zeta - \gamma)(\beta^2 - \zeta^2) = 0.$$

Soient $A = Mk^2$, $Cn = Mk\sqrt{2g\lambda}$; il vient

(3) $$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = 2g(\zeta - \gamma)[\zeta^2 - \beta^2 + \lambda(\gamma - \zeta)] : (\beta^2 + k^2 - \zeta^2);$$

le diviseur est > 0; l'équation $\zeta^2 - \beta^2 + \lambda(\gamma - \zeta) = 0$ a pour racines

(4) $$\zeta = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda\gamma + 4\beta}}{2},$$

quantités réelles, puisque $4\lambda\gamma < \lambda^2 + 4\gamma^2 < \lambda^2 + 4\beta^2$.

Cela posé, si $\lambda\gamma - \beta^2 < 0$, les racines sont de signes contraires; la première est $> \beta$, ce qui est évident si $\lambda \overset{=}{>} 2\beta$; sinon, posons

$$\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda\gamma + 4\beta^2} > 2\beta,$$

d'où, vu que $\lambda < 2\beta$,

$$\lambda^2 - 4\lambda\gamma + 4\beta^2 > (\lambda - 2\beta)^2$$

ou

$$4\lambda\gamma > -4\lambda\beta,$$

ce qui est évident. Ainsi, le numérateur de $\frac{d\zeta^2}{dt^2}$ est de la forme

(5) $$2g(\zeta - \gamma)[\zeta - (\beta + i^2)](\zeta + i'^2).$$

La valeur initiale de ζ est γ, et ne saurait devenir $> \gamma$, vu que l'équation (5) deviendrait < 0; donc ζ devient $< \gamma$, et le centre de gravité de la toupie descend. Donc $\frac{d\zeta}{dt}$ sera < 0, et ce point continue de descendre

jusqu'à ce que la toupie *tombe*, ce qui change les conditions du mouvement. Soit $\lambda\gamma - \beta^2 > 0$; les valeurs de l'équation (4) sont > 0. La première est toujours $> \beta$; la seconde est $< \gamma$. Cela est évident si $\lambda < 2\gamma$; sinon, en posant

$$\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda\gamma + 4\beta^2} > 2\gamma,$$

on trouve

$$4\gamma^2 < 4\beta^2.$$

Donc, etc.

Par suite, le numérateur de $\frac{d\zeta^2}{dt^2}$ est de la forme

$$2g[\zeta - (\beta + i^2)](\zeta - \gamma)(\zeta - \gamma_1),$$

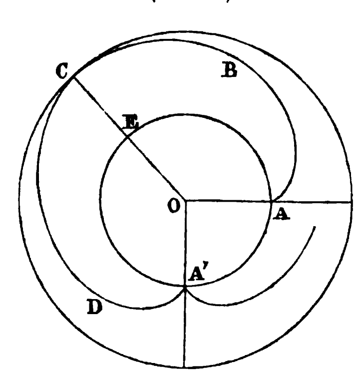
où $\gamma_1 < \gamma$.

On voit que ζ ne sera jamais $> \gamma$; il commencera par décroître jusqu'à γ_1, mais ne pourra jamais devenir $< \gamma$, sans quoi $\frac{d\zeta^2}{dt^2}$ serait < 0. Donc, lorsque $\zeta = \gamma_1$, d'où $\frac{d\zeta}{dt} = 0$, ζ augmentera, $\frac{d\zeta}{dt}$ sera > 0, et le centre de gravité remontera jusqu'à $\zeta = \gamma$. Par conséquent, G oscillera sur sa verticale entre les limites $\zeta = \gamma$, $\zeta = \gamma_1$, et ces oscillations sont évidemment isochrones. La durée d'une oscillation ascendante, comme celle d'une descendante, est

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma} \frac{d\zeta\sqrt{\beta^2 + k^2 - \zeta^2}}{2g(\zeta - \gamma)(\zeta^2 - \lambda\zeta + \lambda\gamma - \beta^2)}.$$

Le point P décrira autour de O une trajectoire qui sera renfermée entre deux circonférences de cercles ayant pour centre commun ce point O, et pour rayons respectifs $\sqrt{\beta^2 - \gamma^2} = \beta\cos\alpha$ et $\sqrt{\beta^2 - \gamma_1^2}$, puisque $\zeta = \gamma$, $\zeta = \gamma_1$. sont les valeurs extrêmes de ζ. Cette trajectoire, pour $\zeta = \gamma$, est normale au cercle intérieur; pour $\zeta = \gamma_1$, elle est tangente au cercle extérieur.

Fig. 2.



Car, pour le sommet du cône, on a

$$x = \beta \sin\psi \sin\theta, \quad y = -\beta\cos\psi\sin\theta;$$

d'où

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-\cos\psi\cos\theta . d\theta + \sin\theta\sin\psi\, d\psi}{\cos\psi\cos\theta . d\theta + \sin\theta\cos\psi\, d\psi},$$

mais $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\zeta}{dt} \cdot \frac{1}{\beta\sin\theta}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$ est de la forme

$$(\gamma - \zeta)^{\frac{1}{2}} . \mathrm{E},$$

E s'annulant avec $\zeta = \gamma_1$, mais non avec $\zeta = \gamma$.

$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn(\gamma - \zeta)}{\beta A \sin^2\theta}$, que je représente par $(\gamma - \zeta)$ F, et l'équation (6) devient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos\psi\cos\theta . \mathrm{E}(\gamma-\zeta)^{\frac{1}{2}} + (\gamma-\zeta)\sin\theta\sin\psi . \mathrm{F}}{\sin\psi\cos\theta . \mathrm{E}(\gamma-\zeta)^{\frac{1}{2}} + (\gamma-\zeta)\sin\theta\cos\psi . \mathrm{F}}$$

$$= \frac{-\cos\psi\cos\theta . \mathrm{E} + (\gamma-\zeta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\sin\psi . \mathrm{F}}{\sin\psi\cos\theta . \mathrm{E} + (\gamma-\zeta)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\psi . \mathrm{F}}.$$

En A (*fig.* 2) où $\zeta = \gamma$, $\frac{dy}{dx} = -\cot\psi$;

En C où $\zeta = \gamma_1$, E s'annule et $\frac{dx}{dy} = \tang\psi$.

Mais ψ est l'angle (*fig.* 2) que fait, avec Ox, la trace

du plan $x_1 y_1$ sur xy, trace qui est perpendiculaire à OP, vu que les plans $x_1\, y_1$ et xy étant perpendiculaires au plan GOP, leur intersection est perpendiculaire à GOP, et, par suite, à GO. Si donc on pose $\mathrm{PO}x = \chi$, on a

$$\chi = \frac{3}{2}\pi + \psi;$$

donc en A (*fig.* 2),

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\chi,$$

en C,

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\chi \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La trajectoire se composera de branches telles que la courbe ACA′, qui est symétrique par rapport à OC. Ces branches seront en nombre fini ou infini, selon que l'arc AEA′ est commensurable avec la circonférence ou non.

La symétrie résulte de ce que $x^2 + y^2 = \beta^2 \sin^2\theta$ reprend les mêmes valeurs avec θ, ainsi que $d\psi$ avec $d\zeta$.

La vitesse angulaire ω donne

$$\omega^2 = n^2 + p^2 + q^2 = n^2 + \frac{1}{k^2}\left[2g(\gamma - \zeta) - \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right].$$

Elle a son maximum avec $\zeta = \gamma_1$ et $\frac{d\zeta}{dt} = 0$, lorsque G est (*fig.* 1) à la limite inférieure de sa course; le minimum est n, et a lieu à la limite supérieure.

Comme $\sin\omega, \mathrm{O}z_1 = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\omega}$ et que $p^2 + q^2$ est nul lorsque $\gamma = \zeta$, $\frac{d\zeta}{dt} = 0$, l'axe instantané revient coïncider avec $\mathrm{O}z_1$, chaque fois que le sommet du cône revient à la circonférence OA. Lorsque ce sommet est sur la circonférence CO, $d\theta$ est encore nul, et les trois rotations $d\theta$, $d\varphi$, $d\psi$ se réduisent à deux dont les axes sont dans le plan PGO; l'axe instantané est donc alors aussi dans ce plan.

SUR LE DEGRÉ DE MULTIPLICITÉ DES RACINES;

PAR M. F.-A. BEYNAC,
Maître de conférences au lycée Louis-le-Grand.

1. THÉORÈME. *Si une équation a un terme indépendant de l'inconnue, cette équation ne peut avoir des racines dont le degré de multiplicité soit égal ou supérieur au nombre de ses termes.*

Démonstration. Une telle équation ne peut avoir de racines nulles. Supposons que le théorème soit démontré pour une équation ayant n termes; je dis que le théorème subsiste aussi pour une équation ayant $n+1$ termes. Car, si cette dernière équation avait une racine dont le degré de multiplicité fût égal ou supérieur à $n+1$, la dérivée qui n'a plus que n termes aurait donc cette même racine, d'après la théorie connue, avec un degré de multiplicité égal ou supérieur à n; ce qui est contraire à l'hypothèse. Or, le théorème est évident pour des équations à *deux* termes. Donc, etc.

2. THÉORÈME. *Si un nombre entier est racine multiple d'une équation n'ayant que des coefficients entiers et l'unité pour premier coefficient, une puissance de ce nombre marquée par le degré de multiplicité divise le dernier terme de l'équation, et les puissances inférieures successives divisent respectivement les coefficients de x, x^2, etc.*

Démonstration. Soit

$$fx = x^m + C_{m-1}x^{m-1} + C_{m-2}x^{m-2} + \ldots + C_2x^2 + C_1x + C_0.$$

Soit n le degré de multiplicité d'une racine α; le polynôme $f(x)$, divisé par $(x-\alpha)^n$, donne pour quotient

un polynôme entier de degré $m-n$; représentons ce polynôme par $\varphi(x)$, de sorte que

$$\varphi x = x^{m-n} + D_{m-n-1}x^{m-n-1} + \ldots + D_2x^2 + D_1x + D_0,$$

et

$$\psi(x) = (x-\alpha)^n = x^n + E_{n-1}\alpha x^{n-1} + E_{n-2}\alpha^2x^{n-2} + \ldots$$
$$+ E_2\alpha^{n-2}x^2 + E_1\alpha^{n-1}x + E_0\alpha^n;$$

ainsi on a l'identité

$$fx = \varphi(x)\psi(x).$$

Égalant les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient

$$C_0 = D_0E_0\alpha^n,$$
$$C_1 = D_1E_0\alpha^n + D_0E_1\alpha^{n-1},$$
$$C_2 = D_2E_0\alpha^n + D_1E_1\alpha^{n-1} + D_0E_2\alpha^{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les quantités C, D, E étant des nombres entiers, il s'ensuit que C_0, C_1, C_2, etc., sont respectivement divisibles par α^n, α^{n-1}, α^{n-2}, etc. C. Q. F. D.

Observation. α et n étant connus, le même système d'équations donne les valeurs des quantités D; car les quantités E sont des coefficients binomiaux connus.

Observation. On peut étendre cette méthode aux racines commensurables fractionnaires.

Théorème. *Si une équation réciproque a des racines multiples, la transformée en* $x + \frac{1}{x}$ *en a aussi au même degré de multiplicité.*

En effet, soit α une racine quelconque de l'équation réciproque

$$f(x) = 0,$$

$\frac{1}{\alpha}$ sera aussi racine, et $f(x)$ est divisible par

$$(x-\alpha)\left(x-\frac{1}{\alpha}\right).$$

Or,

$$(x-\alpha)\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)=x^2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)x+1$$
$$=x\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right].$$

Si n désigne le degré de l'équation, $f(x)$ sera composé de $\frac{n}{2}$ facteurs de cette forme. Or, pour passer de cette équation à la transformée, il faut diviser $f(x)$ par $x^{\frac{n}{2}}$, ce qui revient à diviser chaque facteur par x, puisque leur nombre est $\frac{n}{2}$. La transformée se composera donc de facteurs de la forme

$$\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right].$$

Cela posé, soit p le degré de multiplicité de la racine α; $f(x)=0$ admettra aussi p fois la racine $\frac{1}{\alpha}$, et le premier membre de l'équation sera divisible par

$$(x-\alpha)^p\times\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^p=x^p\left[x+\frac{1}{x}-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^p.$$

Après la division par $x^{\frac{n}{2}}$, il restera dans la transformée en $x+\frac{1}{x}$ le facteur

$$\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^p.$$

Donc la transformée a des racines multiples au même degré de multiplicité que la proposée.

DEMONSTRATION DES THÉORÈMES DE M. STREBOR SUR LES PARABOLES HOMOFOCALES;

PAR M. P. SERRET,
Élève de l'école Normale.

Lemme 1. Soient, dans un même plan, une droite L et un axe ox sur lequel est pris un point fixe o. Menons, du point fixe o, un rayon vecteur ol de la droite L; puis, par le même point o, menons une droite om qui fasse, avec ox, un angle mox double de l'angle lox, et portons enfin, sur cette droite om, une longueur om proportionnelle au carré du rayon vecteur ol $\left(om = \frac{ol^2}{k}\right)$.

L'extrémité m de cette droite om décrira une parabole ayant son foyer au point o. (Chasles, *Aperçu historique*, page 852.)

Démonstration. En se servant des coordonnées polaires, on reconnaît immédiatement, dans l'équation de la courbe dérivée, l'équation d'une parabole dont le foyer est l'origine, c'est-à-dire le point fixe o.

Observation. Étant données plusieurs droites L, L', etc., sur un plan; si nous appliquons à ces droites la transformation du lemme 1, relativement au même point o et au même axe ox, nous obtiendrons des paraboles P, P', etc., ayant leur foyer en o, et que nous appellerons *correspondantes* des droites L, L', etc., *dans le même système métamorphique*.

Lemme 2. L'angle sous lequel se coupent deux paraboles homofocales est égal à l'angle des droites auxquelles elles correspondent.

Démonstration. En effet, 1° l'angle de deux paraboles

homofocales est moitié de l'angle de leurs axes focaux; 2° on peut voir immédiatement, par l'équation de la parabole correspondante à une droite L, que l'angle des axes de deux paraboles homofocales est double de l'angle des droites correspondantes. La même chose s'aperçoit plus facilement encore par des considérations géométriques. Donc l'angle des droites est bien égal à l'angle des paraboles correspondantes.

Conséquences. 1°. Il résulte immédiatement de là que tous les théorèmes de collinéation sur des droites s'appliquent immédiatement aux paraboles homofocales. Prenant, en particulier, les théorèmes connus sur les hauteurs et les bissectrices d'un triangle, on retrouve les théorèmes énoncés par M. Strebor (*voir* t. VII, p. 397).

2°. Dans le système métamorphique actuellement considéré, à un cercle dans le système primitif correspond un ovale de Descartes dans le système dérivé (*Aperçu historique*, note XXI, page 351). Donc, invoquant l'égalité des angles inscrits dans un même segment de cercle, on a le théorème suivant, donné par M. Strebor.

Théorème. *Si deux arcs de paraboles circonfocales passent respectivement par deux points fixes et se coupent sous un angle constant, leur point d'intersection décrira un ovale de Descartes.*

Observation. Tous les théorèmes précédents sont contenus dans la note XXI (pages 350-352) de l'*Aperçu historique* de M. Chasles. La dernière proposition y est énoncée tout au long, à cette seule différence près, que l'angle des paraboles est remplacé, dans l'énoncé, par l'angle de leurs axes; ce qui revient au même, comme nous l'avons dit. Quant au lemme 2, il est aussi renfermé implicitement dans la même note.

SOLUTION DE LA QUESTION 63

(voir t. II, p. 137),

ET NOTE SUR LES TRANSVERSALES SPHÉRIQUES

(voir t. VII, p. 282);

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,
Professeur de mathématiques.

Deux triangles sphériques ABC, A'B'C', *situés sur une même sphère, sont tels, que les arcs de grand cercle* AA', BB', CC' *concourent en un même point* S; *les intersections de* AB *avec* A'B', *de* AC *avec* A'C', *de* BC *avec* B'C', *sont sur un arc de grand cercle.* (FINCK.)

Puisque la théorie des transversales rectilignes peut être transportée dans la géométrie sphérique, pourvu que l'on change les lignes droites en arcs de grands cercles, et que, dans les relations entre les segments, on substitue aux segments leurs sinus, on a, en considérant les triangles ABS, ACS, BCS et les transversales A'B', A'C', B'C', et les intersections D, E, F de AB et A'B', AC et A'C', BC et B'C',

$$\sin AD.\sin A'S.\sin BB' = \sin AA'.\sin B'S.\sin BD,$$
$$\sin CE.\sin C'S.\sin AA' = \sin CC'.\sin A'S.\sin AE.$$
$$\sin BF.\sin B'S.\sin CC' = \sin BB'.\sin C'S.\sin CF;$$

d'où l'on tire, par la multiplication,

$$\sin AD.\sin CE.\sin BF = \sin BD.\sin AE.\sin CF.$$

Les points D, E, F sont donc sur un même arc de grand cercle.

Ce théorème est connu dans la géométrie plane et rectiligne.

M. Brianchon (*Journal de l'École Polytechnique*, 13e cahier, page 229) considère ce dernier théorème comme un cas particulier du théorème suivant :

Si l'on trace un triangle sur la surface extérieure d'une pyramide triangulaire, et qu'on mène les diagonales des trois quadrilatères formés sur les faces de la pyramide par ses arêtes, l'intersection de la base et le côté du triangle, le plan de la base, le plan du triangle et le plan conduit par les intersections des diagonales dans chaque quadrilatère, se coupent suivant une même ligne droite.

En effet, de cette proposition, il résulte que les intersections des côtés des triangles avec les côtés correspondants de la base sont, dans l'espace, sur une même ligne droite, et si l'une des arêtes de la pyramide se rapproche indéfiniment du plan des deux autres, ces trois intersections, qui seront à la limite celles des côtés analogues de deux triangles ayant leurs sommets sur trois droites concourantes, resteront en ligne droite.

Il sera peut-être utile aux élèves de montrer ici comment on établit la théorie des transversales sphériques.

THÉORÈME. *Tout arc de grand cercle détermine, sur les trois côtés d'un triangle sphérique ou sur leurs prolongements, six segments tels, que le produit des sinus de trois segments non consécutifs est égal au produit des sinus des trois autres.*

Considérons le triangle ABC et un arc transversal coupant les côtés AB, AC, BC en F, E, D.

On a, dans les triangles AEF, CDF, BDF :

$$\sin AE : \sin AF :: \sin F : \sin E,$$
$$\sin CD : \sin CE :: \sin E : \sin D,$$
$$\sin BF : \sin BD :: \sin D : \sin F;$$

d'où l'on tire, en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens et multipliant,

$$\sin AE . \sin CD . \sin BF = \sin AF . \sin CE . \sin BD.$$

Toute la théorie des transversales sphériques se déduit de ce théorème de la même manière que la théorie des transversales rectilignes se déduit du théorème analogue.

NOTE SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE;

PAR M. J. MENTION.

Le but de cette Note est de mettre en lumière certaines propriétés déjà connues, et d'en signaler d'autres non encore remarquées.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Les points où les bissectrices coupent le cercle circonscrit sont les milieux des distances des centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits (I, I′, I″, I‴). On le reconnaît directement, ou, si l'on veut, c'est une conséquence de la propriété du cercle des neuf points.

Bobillier (*Géométrie*, § 5, proposition VI) s'est servi de cette propriété pour donner la valeur de la distance des centres du cercle inscrit et du cercle circonscrit, vérifiée par Simon Lhuilier (*Annales de Gergonne*, tome I, page 149) assez péniblement. Mais personne ne me paraît en avoir tiré le parti que voici.

Les milieux de II′ et I″I‴ étant sur un même diamètre, comme les distances de ces milieux au côté a sont égales à $\frac{1}{2}(\alpha - r)$ et $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, ($r$, α, β, γ longueurs des rayons des cercles inscrits et ex-inscrits), il faut en conclure $4R = \alpha + \beta + \gamma - r$, où R est le rayon du cercle circonscrit.

$R - d$, $R + d$ sont aussi des expressions de ces distances: d'où les égalités $2R = 2d + \alpha - r$, $2R = \beta + \gamma - 2d$ et

deux autres de même espèce, dans lesquelles d, d', d'' représentent les distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés a, b, c. Ajoutant ensemble les égalités d'une même espèce et tenant compte de la valeur ci-dessus de $\alpha + \beta + \gamma - r$, on arrive à $d + d' + d'' = \mathrm{R} + r$.

C'est un théorème dû à Carnot (*Géométrie de position*, n° 137), et M. de Lafrémoire, dans son ouvrage, a donné la démonstration de Carnot (page 282). Les égalités précédentes donnent lieu à quelques remarques que je passe sous silence.

2. Théorème. *Les perpendiculaires abaissées des sommets du triangle et du point de rencontre de ses hauteurs sur les droites qui joignent les pieds de celles-ci, sont des rayons du cercle circonscrit au triangle ou de l'un des cercles circonscrits aux triangles dont les sommets sont le point de rencontre des hauteurs et deux des sommets du triangle proposé.*

A un sommet donné, dans chacun des quatre triangles, correspond la perpendiculaire sur la droite joignant les pieds des hauteurs issues des *deux autres sommets*.

Application aux triangles (I'I''I''', II'I''', ...). Les douze rayons des cercles inscrit et ex-inscrits perpendiculaires au côté du triangle, sont des rayons des cercles circonscrits aux triangles (I'I''I''', II'I'''). Si (a, α) désigne le rayon du cercle α perpendiculaire au côté a, il faut ainsi grouper ces douze rayons :

(a, α), (b, β), (c, γ)	passent par le cercle circonscrit à	I'I''I'''
(α, r), (c, β), (b, γ)	*id.*	II''I'''
(b, r), (c, a), (a, γ)	*id.*	II'I'''
(c, r), (a, β), (c, α)	*id.*	II'I''

Corollaire. L'aire d'un triangle est égale au rayon du cercle circonscrit multiplié par le demi-périmètre du triangle formé par les droites joignant les pieds des per-

pendiculaires. M. de Pistoris (*Annales*, t. V, p. 453) arrive difficilement à cette expression.

Pour les trois autres triangles (AHB,...,), il n'y a qu'à mettre dans cet énoncé le *demi-périmètre diminué de l'une des droites*. H est le point de rencontre des trois hauteurs.

Application. Les surfaces des quatre triangles formés dans (I′I″I‴) sont $2pR$, $2(p-a)R$, $2(p-b)R$, $2(p-c)R$.

Théorème. *La bissectrice d'un angle divise en deux parties égales l'angle formé d'un rayon du cercle circonscrit et de la hauteur partant d'un même sommet.*

Application. Construire un triangle, connaissant les longueurs d'une hauteur, d'une médiane et d'une bissectrice issues d'un même sommet.

3. *Des tangentes communes*. Outre les côtés, il y a encore six tangentes communes aux systèmes de deux des cercles (r, α, β, γ) dont les centres de similitude sont les pieds des six bissectrices.

Tang (r, α) représente la tangente commune aux cercles (r) et (α), etc.

Du théorème précédent, je déduis fort aisément :

Corollaire. Ces six tangentes sont parallèles deux à deux et perpendiculaires aux rayons du cercle circonscrit issus des sommets. Ainsi de tang (r, α) et tang (β, γ). Alors, ces tangentes sont parallèles aux lignes joignant les pieds des perpendiculaires : ce qu'on voit directement.

Les tangentes (r, α), (β, γ) coupent le côté a aux points où les bissectrices partant de A le rencontrent. Quant aux côtés b, c, on rabattra sur chacun d'eux, à la suite du sommet A et dans la direction de ses côtés pour la première tangente, dans la direction inverse pour la seconde, les longueurs c, b.

A cause de cela, j'appellerai ces deux tangentes, l'une

tangente commune directe relativement au sommet A, et l'autre *tangente commune inverse relativement au sommet* A.

THÉORÈME. *La droite joignant deux points de contact du cercle inscrit, la droite joignant les pieds de deux perpendiculaires, et celle enfin qui joint les points de rencontre de deux bissectrices avec les côtés opposés, vont concourir en un même point.*

Soit A le sommet mis de côté dans l'énoncé. Pour démontrer le théorème, on remarquera que la droite des pieds est parallèle à la tangente commune inverse relativement au sommet A, que celle-ci et *la droite des points de rencontre des deux bissectrices*, coupent le côté *a* au même point, et enfin que *la droite des points de contact* est parallèle à la bissectrice externe de l'angle A.

QUELQUES MOTS SUR LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE;

PAR M. LEBESGUE.

---

1. Puisque de nombreuses propositions sur les figures planes passent de la surface sphérique à la surface plane avec ou sans modification, il semble que les auteurs d'Éléments de géométrie auraient dû donner les propositions vraies dans les deux cas, sauf à établir ensuite la modification pour la surface plane.

Ainsi, de la propriété du triangle isocèle, on tirera sans difficulté ce théorème :

Tout polygone plan ou sphérique d'un nombre de côtés pairs, convexe et inscrit, est toujours tel, que la somme des angles de rangs impairs est égale à celle des angles de rangs pairs.

Corollaire. Pour le quadrilatère plan, la somme des angles opposés vaut deux droits, puisque la somme des quatre angles vaut quatre droits.

2. THÉORÈME. *Dans un triangle inscrit, plan ou sphérique, deux sommets* A, B *étant fixes et le troisième* C *mobile, la somme* $A + B - C$ *est constante.*

Cela se tire facilement de la proposition du triangle isocèle.

Corollaire. Pour le triangle plan, C est constant puisque

$$A + B - C \quad \text{et} \quad A + B + C = 2d$$

sont des quantités constantes.

3. Il serait facile de multiplier les théorèmes sur les polygones inscrits et circonscrits. Je me borne à faire voir comment le théorème précédent donne de suite un théorème de Lexell sur les triangles sphériques équivalents.

Pour que l'aire du triangle sphérique ABC de base donnée AB soit constante, il faut qu'en représentant par A, B, C les axes de grand cercle qui mesurent les angles A, B, C, et par 4Q la circonférence du grand cercle, on ait

$$A + B + C - 4Q$$

constant.

Or si l'on conçoit les diamètres AOA', BOB', où O est le centre de la sphère; dans le triangle sphérique A'B'C, on aura évidemment

$$A = 2Q - A', \quad B = 2Q - B';$$

de sorte que

$$A + B + C - 4Q = C - (A' + B').$$

Ce qui montre que le triangle CA'B', qui a deux sommets fixes, est inscrit dans le même cercle, quel que soit le point C.

En effet,

$$C = A'CP + PCB' = CA'P + CB'P = A' + B' + 2\,PA'B',$$

où P est le pôle du triangle CA′B′,

$$C - (A' + B') = 2\,PA'B',$$

ce qui détermine le pôle indépendamment de toute position particulière du point C.

Cette démonstration revient, je crois, à celle de M. Steiner (*voir* tome IV, page 587; tome V, page 22).

4. De même, dans la solution des problèmes, les auteurs d'Éléments auraient dû conserver les constructions qui s'appliquent également aux figures planes et aux sphériques.

Voici une construction pour la tangente au cercle par un point extérieur A.

Construction d'Euclide.

Du point O centre du cercle, avec le rayon OA, décrivez le cercle concentrique; par le point D, où OA coupe la circonférence, menez la perpendiculaire DC à OD, coupant la grande circonférence en C; tirez OC coupant la petite circonférence en B; AB sera la tangente.

Cette proposition s'étend à la sphère, OA et DC étant des arcs de grands cercles perpendiculaires.

On donne ordinairement une construction fondée sur la propriété de l'angle inscrit, on décrit un demi-cercle sur le diamètre OA, ce qui détermine les points de contact; cette construction n'est plus bonne pour la sphère. Il semble que la construction d'Euclide, qui revient à construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse est OA, aurait pu rester dans les Éléments.

BIBLIOGRAPHIE (*).

Éléments de Géométrie descriptive; par M. *J. Babinet*, ancien élève de l'École Polytechnique, membre de l'Institut, etc. Paris, 1850.

Voilà un livre destiné à réussir par deux raisons : d'abord il est bien fait; ensuite il vient à propos remplir une lacune dans l'enseignement de la Géométrie descriptive. On peut, en effet, classer les ouvrages consacrés à cette science en deux catégories; l'une comprenant les grands traités de Monge, de Hachette, de M. Vallée, de M. Leroy, de M. Th. Olivier, et l'autre une série de traités beaucoup plus élémentaires, destinés aux commençants ou à ceux qui doivent passer certains examens.

Or, depuis quelque temps, ces examens se sont étendus; on exige beaucoup plus des candidats aux diverses écoles publiques. Par exemple, à l'École Polytechnique, le cours de géométrie descriptive proprement dite a été relégué tout entier dans le programme d'admission, et l'on ne s'occupe plus à l'École que des applications à la coupe des pierres, à la charpente, etc.

De là, urgence de fournir aux jeunes gens un traité plus complet que les livres de la seconde catégorie, et plus élémentaire que les grands ouvrages des maîtres dont je viens de parler.

Tel paraît avoir été le but principal que s'est proposé

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

M. Babinet en écrivant ce nouvel ouvrage. M. Babinet n'a jamais professé la géométrie descriptive, et peut-être s'en apercevra-t-on au style de son livre; mais, en sa qualité d'examinateur à l'École Polytechnique, il a pu, mieux que bien des professeurs, juger des difficultés spéciales que ce genre d'études présente aux élèves, des idées fausses qu'ils se font souvent, faute d'avoir été avertis, sur une science si différente de celles dont on les occupe d'ordinaire; il a dû réfléchir plus que personne aux moyens de ramener l'esprit des élèves au vrai point de vue où l'on doit se placer pour bien apprécier cet ensemble qui est, à la fois, une science et un art.

Là est la source des qualités qui distinguent ce livre. Le point de vue concret, le but pratique si essentiellement propres à la géométrie descriptive, y sont rappelés à chaque pas. Et si M. Babinet est, surtout à l'Académie, un savant théoricien auquel les doctrines les plus abstraites sont familières, on se souvient néanmoins, en lisant son nouveau Traité, que le célèbre physicien a débuté par être un officier d'artillerie, habitué à se servir de la science comme d'un outil.

Quant aux difficultés d'examen, aux chicanes de détail par lesquelles on peut s'assurer si l'élève a compris et s'il est réellement maître de son sujet, elles ont été largement traitées. L'auteur ne cherche pas à tout dire, on ne viendrait point à bout d'épuiser les difficultés; mais il insiste sur les moyens généraux de les résoudre toutes, et n'épargne pas les exemples. Parmi ceux-ci, on remarquera bon nombre de questions nouvelles élégamment résolues pour la plupart. Sans doute l'élève éprouvera quelque peine à se familiariser avec la manière concise et parfois trop brève de M. Babinet; il en voudra à l'auteur de n'avoir pas suivi l'usage, qui consiste à toujours présenter les données graphiques dans certaines positions

commodes et conventionnelles; mais il reconnaîtra bientôt l'avantage de cette manière à ses propres progrès, à la facilité rapidement acquise de répondre à tout, de se tirer par lui-même des difficultés imprévues.

Après ces éloges que je crois mérités, ne pourrai-je aussi hasarder quelques critiques? Si elles sont fondées, l'auteur pourra facilement en tenir compte dans les éditions futures. Ces critiques porteront sur trois points: l'ordre des matières, la nouvelle théorie du développement et l'appendice qui termine le livre.

Pourquoi l'auteur place-t-il les intersections de surfaces avant les plans tangents? Je n'ai rien trouvé dans l'ouvrage qui justifiât cette dérogation aux usages établis. On peut dire, à l'appui de l'usage, que le mode de contact d'une surface et d'un plan est la première chose à enseigner, après le mode de génération, pour l'exacte connaissance de cette surface. Par exemple, l'élève est bien plus frappé de la différence essentielle qui existe entre les surfaces de révolution du second degré, s'il considère leurs contacts avec un plan, que s'il étudie la nature des courbes d'intersection. Celles-ci peuvent être de même espèce pour des surfaces bien différentes; les contacts, au contraire, diffèrent aussi profondément que les surfaces mêmes. Ensuite, pour représenter graphiquement les surfaces et pour savoir où chercher les points de leurs mutuelles intersections, il est bon de déterminer préalablement les limites de leurs projections; or ces limites impliquent la considération des plans tangents. Enfin si l'on attache tant d'importance aux tangentes, en géométrie descriptive, n'est-ce pas, en partie, parce qu'elles guident l'œil et la main du dessinateur dans le tracé exact des courbes d'intersection?

Passons à la nouvelle théorie du développement enseignée par M. Babinet. L'auteur a grandement raison d'in-

sister sur la méthode générale qui consiste à construire l'épure du développement par une suite de triangles juxtaposés dont les trois côtés sont mesurés directement sur l'épure de la surface développable. Cela revient à identifier, en pratique, une telle surface avec un assemblage de facettes planes analogue à un prisme ou à une pyramide. Mais tant qu'il ne s'agira que de cônes ou de cylindres, et c'est là le cas ordinaire, on préférera toujours, je pense, à cette succession de triangles où un des côtés doit être constamment fort petit et où les erreurs inévitables du tracé peuvent s'accumuler et devenir très-sensibles, on préférera, dis-je, la construction habituelle par la section auxiliaire, droite dans le cylindre, sphérique pour le cône. Il ne faut pas, en effet, oublier cette simple remarque pratique : le nombre des points nécessaires pour tracer une courbe à la main est bien moindre (surtout quand on peut déterminer quelques tangentes) que le nombre d'ouvertures de compas qu'il faut porter sur cette courbe pour en déterminer la longueur. Faites donc en sorte, quand cela est possible, que ces deux opérations si distinctes ne se confondent pas. Au reste, l'auteur n'a point négligé les solutions ordinaires; seulement il les donne à contre-cœur.

Reste l'appendice, où M. Babinet a renvoyé l'examen de plusieurs difficultés et quelques détails sur les rabattements ou sur les changements de plan de projection. L'auteur aurait mieux fait, à mon avis du moins, de présenter ces considérations très-importantes dès le commencement du livre. Il a cité, à deux reprises, un dicton attribué à l'école de Monge : « Apprenez à trouver le » point de rencontre d'une droite et d'un plan et la dis- » tance de deux points; c'est là toute la géométrie des- » criptive. » Ne serait-ce pas un meilleur conseil à donner aux élèves que de leur dire : « Apprenez à changer de

» plans de projection, et vous saurez lever toutes les dif-
» ficultés? » Ces difficultés tiennent toutes, en effet, à ce que les données occupent des positions défavorables par rapport aux plans coordonnés; il suffit de changer ceux-ci. C'est ce que savent bien tous les élèves formés par notre éminent professeur, M. Olivier, dont les méthodes mériteraient d'être plus largement introduites dans l'enseignement qu'elles ne l'ont été jusqu'ici.

Ajoutons, pour terminer cette critique, que M. Babinet aurait pu, sans inconvénient, supprimer certains problèmes et certaines épures, telles que la tangente à une courbe quelconque par la singulière méthode de Hachette, l'intersection d'un tore par une sphère et la spirale conique; je regrette aussi de ne pas voir, dans la section droite d'un cylindre oblique, une reproduction plus fidèle de l'épure maintenant classique de M. Olivier.

Si je voulais mettre autant de détails dans l'éloge que dans la critique, cette analyse serait beaucoup trop longue. Il y aurait à féliciter M. Babinet de tout ce qu'il a dit d'excellent sur les raccordements des courbes et des surfaces, sur les développements graphiques, sur les ombres, la perspective, etc., surtout de ses conseils au lecteur et des problèmes d'exercice qu'il lui propose à chaque pas. L'auteur me paraît avoir lui-même résolu ce triple et difficile problème : réunir, sous le plus mince format, tout ce qui est nécessaire pour familiariser l'élève avec le véritable esprit des méthodes, sans perdre de vue les exigences de l'examen. Après avoir étudié ce livre, l'élève sera, je crois, parfaitement préparé à tous les genres de difficultés.

H. Faye,
Membre de l'Institut.

Leçons nouvelles de Géométrie élémentaire; par M. *A. Amiot* (*), professeur de mathématiques au Lycée Bonaparte, à Paris. In-8°, I-VII, 338 pages, figures dans le texte.

L'auteur adopte la grande dichotomie de la science de l'étendue en *géométrie plane* et *géométrie de l'espace*, division naturelle que M. Vincent a introduite le premier, à ce que je crois, dans l'enseignement. Les sous-divisions sont indiquées par *livres* et *chapitres*.

Le livre I[er] (5-28) est intitulé : *La ligne droite et la ligne brisée*, et il débute par la *recherche de la commune mesure de deux lignes et de leur rapport* : c'est la troisième proposition du dixième livre d'Euclide. Arbogast a eu l'idée de fonder sur cette recherche la théorie des incommensurables. Legendre aussi a placé cette recherche en tête de sa *Géométrie*, mais sans en tirer peut-être tout le parti convenable. C'est encore M. Vincent qui a, le premier, développé didactiquement l'idée d'Arbogast. Dans l'ouvrage actuel, l'exposition de cette doctrine est très-claire et a, entre autres, le mérite de la brièveté. La *même locution* sert aux démonstrations du même genre, ce qui donne des facilités à l'intelligence et à la mémoire. Le chapitre III (13-16) traite *de la perpendiculaire et des obliques*. Nous croyons que ces théorèmes font double emploi avec les théorèmes sur l'égalité et les inégalités des triangles, objets du chapitre V ; il faudrait éviter de donner de simples corollaires comme des propositions fondamentales. Le chapitre suivant (17-21) traite des parallèles, *geometrarum crux*. M. Gergonne a donné le sage conseil d'adopter pour axiome que, par un même point, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite.

(*) Ne pas confondre avec un homonyme, aussi savant géomètre, professeur au lycée Saint-Louis (*voir* tome VI, page 407.)

Pourquoi faire de cet axiome le sujet d'un *théorème?* c'est le premier de ce chapitre. Il me semble que le même raisonnement pourrait servir à démontrer que, par un même point, on ne peût mener deux asymptotes à l'hyperbole. Dans le chapitre VII, consacré aux polygones, on ne dit rien des polygones non convexes. C'est une lacune. On rencontre souvent ce genre de polygones dans les arts, par exemple, en fortification. On peut consulter l'excellent article de M. Barbet (page 183).

Le livre II (35-72) est intitulé : *De la circonférence du cercle*. La tangente est considérée comme la position extrême d'une sécante tournant autour d'un de ses points d'intersection. Cette définition *infinitésimale* est utile. La mesure des angles dans le cercle et des problèmes sur des constructions diverses remplissent les chapitres IV, V, VI, VII (49-63). Le chapitre VIII est intitulé : *Polygones inscrits et circonscrits*. En parlant du quadrilatère circonscrit, on a omis le quadrilatère non convexe et l'observation si juste de M. Steiner (t. VIII, p. 367). Le livre est terminé par trente problèmes; le second a pour objet de demontrer que la somme des distances aux sommets d'un point situé dans l'*intérieur* d'un triangle est comprise entre le demi-périmètre et le périmètre du triangle. La même propriété existe dans tous les triangles géodésiques.

Le livre III est intitulé : *Des transversales dans le triangle* (73-126). Voici donc enfin la géométrie *segmentaire* introduite régulièrement; elle n'est plus reléguée dans les recoins obscurs d'un appendice, ni imprimée en illisibles caractères microscopiques. Les théorèmes sont exposés avec le même soin que ceux de la géométrie ordinaire. On considère les transversales dans le triangle, dans la circonférence; la division harmonique et anharmonique; les *puissances* de M. Steiner; les radicaux de

M. Gautier, les involutions de Desargues, les centres d'involution de M. Chasles et les polaires de la Hire; c'est encore une heureuse innovation, presque une hardiesse, de citer des géomètres dans un ouvrage élémentaire de géométrie. N'est-il pas à craindre que les élèves ou des élèves ne veuillent les connaître?

Il est à regretter qu'on n'ait pas fait usage de l'expression *homographique*, si commode, si pittoresque, et d'autant plus importante qu'elle sert de base à une *méthode*, enseignée aujourd'hui en Sorbonne. Dans le chapitre de la *similitude*, on parle du centre de similitude d'Euler et de l'*homothétie* de M. Chasles.

Ce livre est terminé par une série de problèmes et de *lieux géométriques* très-instructifs. Il est fâcheux qu'on ait relégué la génération *bifocale* du cercle dans un corollaire; c'est une proposition fondamentale. C'est ici l'endroit où il fallait traiter de la génération bifocale des coniques et de la génération *modulaire* (*), qui comprend aussi la parabole; car les coniques appartiennent aux éléments de géométrie synthétique autant que le cercle et la droite. Elles ont plus d'importance et ne présentent pas plus de difficultés, en se bornant aux propriétés *cinématiques*, résultant de la loi du mouvement.

Le livre IV (127-175) est intitulé : *Propriétés métriques des figures*. Le théorème dit de Pythagore est le premier du chapitre II (page 137). La démonstration semble peu naturelle: celle d'Euclide me paraît préférable. Le théorème IV donne l'aire du triangle en fonction des côtés, par la voie analytique; l'aire du cercle est donnée selon la méthode d'Arbogast, par les *limites*. On a omis ce théorème qui sert de fondement à cette théorie:

(*) Les Anglais nomment génération *modulaire*, tout lieu géométrique, résultant de foyers, de directrices et d'un rapport (module) donnés.

lorsque deux quantités constantes sont toujours renfermées entre deux variables dont la différence diminue indéfiniment, les quantités constantes sont égales. π est calculé d'après le procédé dit du géomètre *allemand* Schwab. Il est vrai que J. Schwab est né, en 1765, à Mannheim ou aux environs ; mais lorsqu'il a publié son procédé, il était citoyen français, établi à Nancy. Voici le titre de son ouvrage : *Éléments de géométrie où la théorie de la ligne droite et des parallèles est démontrée rigoureusement et à la portée des commençants, avec un nouveau moyen d'approcher plus promptement du rapport de la circonférence au diamètre ;* par *J. Schwab ;* première partie : *Géométrie plane*. Nancy, 1813, in-8° de 107 pages. L'auteur est mort dans cette ville, le 23 novembre de la même année (*).

Le livre V est le premier de la géométrie de l'espace ; il traite des angles solides et des faisceaux planaires harmoniques et anharmoniques. Le dernier chapitre, intitulé : *Symétrie,* contient les trois dispositions symétriques, par rapport à un *point*, à un *axe* et à un *plan*.

Les propriétés projectives, cylindriques et coniques auraient été bien placées ici.

Les deux derniers livres contiennent les propriétés et les mesures des surfaces coniques, cylindriques et sphériques. Les définitions sont d'une grande généralité et embrassent les surfaces *réglées* et les surfaces de révolution. Un chapitre spécial est consacré au triangle sphérique ; l'aire de ce triangle est le sujet du théorème V du livre VIII (page 317) : *L'aire d'un triangle sphérique est*

(*) Il avait quitté le pays natal pour venir jouir, en 1793, de la liberté illimitée en France. Dès son arrivée à Strasbourg, il fut incarcéré comme suspect étranger. Dans sa prison, il se mit à étudier le français, en apprenant par cœur tout le dictionnaire : c'était sa manière d'apprendre les langues.

égale au produit du rayon de la sphère par l'arc de grand cercle qui mesure la somme de ses angles, diminuée de deux angles droits. Énoncé clair.

A la suite de chaque livre on trouve des problèmes et des lieux géométriques très-instructifs.

Dans les ouvrages de géométrie, chaque théorème s'appuyant sur des *précédents* est rempli de citations de ces précédents. Dans les *Leçons nouvelles*, on ne rencontre aucune citation de ce genre ; c'est une singularité.

Au résumé, nous possédons enfin un Traité didactique où l'on peut apprendre la géométrie, non pas telle qu'elle était en 1800, mais telle qu'elle est en 1850. Étudier ce Traité est un excellent moyen de se préparer aux *examens*. Est-ce le meilleur moyen de se préparer aux *examinateurs?* je l'ignore (*). Lorsque tant d'ouvrages élémentaires, semblables à l'hirondelle, présentent beaucoup d'envergure et peu de corps, nous avons ici, au contraire, sous un petit volume, de grandes richesses. Profitons-en ; mettons-nous à l'étude, et ne justifions pas cette assertion de Jean-Jacques, que nous préférons toujours une mauvaise manière de savoir à une meilleure manière d'apprendre.

(*) On me dit, *relata refero*, que cette année les questions d'examen pour l'École Polytechnique sont d'une *simplicité primitive*. Sur la pente où nous sommes, je ne désespère pas de voir prescrire des *questionnaires* avec les réponses stéréotypées pour toute espèce d'examen. Cette forme de catéchisme convient même à un siècle qui aime tant à balbutier le langage et à grimacer les dehors de la piété. Τάφοι κεκονιαμένοι.

NOTE SUR LE PROBLÈME DU BILLARD CIRCULAIRE;

PAR M. ABEL TRANSON.

Une bille étant placée sur le plan d'un cercle, dans quelle direction faut-il la lancer pour qu'après deux réflexions sur la circonférence, elle revienne au point de départ?

Ce problème a été résolu géométriquement par Léon Anne dans le premier volume des *Nouvelles Annales*, page 36, mais pour le cas seulement où le point de départ est dans l'intérieur du cercle. En traitant la question plus généralement, on rencontre quelques circonstances qui méritent d'être notées.

Je prends pour inconnue la perpendiculaire abaissée du centre sur la direction que la bille devra suivre. On obtient alors l'équation

$$x\left(x+\frac{r^2}{2a}\right)=\frac{r^2}{2},$$

où r est le rayon du cercle, et a la distance du point de départ au centre. Ainsi on aura à construire un rectangle dont la surface est $\frac{r^2}{2}$, et dont les côtés ont entre eux la différence de longueur exprimée par $\frac{r^2}{2a}$.

Ces deux côtés représentent les racines toujours réelles de l'équation précédente. Mais si a est plus petit que r, c'est-à-dire si le point donné est dans l'intérieur du cercle, l'un des deux côtés du rectangle est toujours moindre que a, et l'autre toujours plus grand. De sorte que, d'après la signification même de l'inconnue, la question propo-

sée ne peut être résolue que d'une seule façon. Au contraire, si le point donné est extérieur, c'est-à-dire si a est plus grand que r, alors les deux valeurs de x sont moindres que r, et, par conséquent, il y a deux solutions bien distinctes; ce dont on se rendra compte aisément par la considération de la figure. Mais alors il faut considérer le point donné, appelé *point de départ*, comme un point placé *sur la direction de la bille*, et devant encore s'y trouver après deux réflexions successives. Cependant, en supposant ouverte la bande du billard circulaire, on pourrait réaliser l'une au moins de ces deux solutions dans le sens précis de l'énoncé du problème.

Appelons C le centre du cercle, A le point de départ de la bille situé à l'extérieur du cercle, et B le point de la circonférence entre A et C sur la ligne qui joint ces deux points.

Si le rayon CB se trouve être *le plus grand* segment de la distance CA partagée en moyenne et extrême raison, et si, du point A comme centre avec CB pour rayon, on décrit une circonférence qui coupe la circonférence donnée au point D; la bille, lancée dans l'intérieur du cercle sous la direction AD, y décrira, par ses réflexions successives, *un décagone convexe* dont deux côtés seront dirigés vers le point A.

Si le rayon CB se trouve être *le plus petit* segment de la distance CA partagée en moyenne et extrême raison, et si, du point A comme centre, et pour rayon le côté du pentagone étoilé inscrit à la circonférence donnée, on décrit une circonférence qui coupe la circonférence donnée au point D; la bille lancée dans la direction AD parcourra dans le cercle un *pentagone convexe* dont deux côtés seront dirigés vers A.

Ces deux propriétés sont analogues à celles qui ont été démontrées dans l'article ci-dessus cité, relativement à

deux situations particulières du point A *dans l'intérieur* du cercle.

CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES, EN 1850

(voir t. VIII, p. 394).

1°. *Composition d'analyse.*

Si une courbe à double courbure a sa première courbure constante, le lieu des centres de courbure se confond avec l'arête de rebroussement de la surface enveloppe des plans normaux, et réciproquement.

2°. *Composition de mécanique.*

1°. Un point matériel pesant est assujetti à glisser sans frottement sur une courbe liée invariablement à un axe vertical, autour duquel elle tourne d'un mouvement uniforme; on demande à quelle condition la courbe doit être assujettie, pour que le point glisse d'un mouvement uniforme.

2°. Une droite sur laquelle peut glisser un point matériel pesant tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe horizontal auquel elle est liée, mais qu'elle ne rencontre pas; déterminer le mouvement du point sur la droite.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SURFACES ALGÉBRIQUES

(voir p. 283).

1. Deux surfaces algébriques se coupent suivant une ligne dont la projection sur un plan est d'un degré mar-

qué par le produit des nombres qui indiquent les degrés des surfaces.

Observation. Dans des cas particuliers, plusieurs branches de la ligne d'intersection peuvent se superposer, se transposer à l'infini, etc.; circonstances qui diminuent le degré, le cas général donnant une limite.

2. Trois surfaces algébriques ont en commun un nombre de points égal au produit des trois nombres qui indiquent les degrés des trois surfaces.

Observation I. La même que la précédente.

Observation II. Bezout, le premier, a énoncé et démontré cette proposition, fondée sur la théorie de l'élimination que l'on doit à l'illustre examinateur; théorie des *polynômes multiplicateurs*, la plus philosophique que l'on ait jamais donnée sur cette matière, et qui comprend, comme cas particulier, tous les procédés que l'on a donnés depuis. (*Théorie générale des équations algébriques*, page 33; 1779.)

Observation III. Dans ce qui suit, on suppose que la surface est de degré n.

3. *Théorème segmentaire de Newton*. Par un point O dans l'espace, on mène deux transversales de *directions données*. Chaque transversale forme n segments à compter du point O; le produit des segments formés par la transversale de la première direction, divisé par le produit des segments de la seconde transversale, donne un quotient constant quel que soit le point O.

Démonstration. Si les quatre transversales sont dans un même plan, ou rentre dans la proposition II des courbes planes (page 283). Si les transversales sont dans deux plans parallèles, il suffit de rapporter la surface aux sécantes comme axes (t. III, p. 511).

4. *Théorème segmentaire de Carnot*. Soit un polygone plan ou gauche de p côtés; soient A_1, A_2, ..., A_p les

sommets consécutifs du polygone. Considérant A_1, A_2..., A_p successivement comme des points fixes, les sécantes $A_1 A_2$, $A_2 A_3$,..., $A_{p-1} A_p$, formeront chacune n segments, et, en tout, pn segments; relativement aux points fixes A_1, A_p, A_{p-1},..., A_2 et aux sécantes $A_1 A_p$, $A_p A_{p-1}$,..., $A_2 A_1$, on aura pn autres segments dont le produit est égal au produit des pn premiers *segments*.

Démonstration. La même que pour les courbes planes (*voir* tome IV, page 526).

Observation. Newton et Carnot n'ont pas énoncé ces théorèmes *explicitement*.

5. *Surface centrale segmentaire* de M. Grassmann, professeur à Stettin. (Crelle, tome XXIV, page 262, 1842.)

Soit

$$(1)\qquad F_n + F_{n-1} + \ldots + F_r \ldots + F_0 = 0$$

l'équation d'une surface de degré n; F_r est une fonction homogène entière en x, y, z de degré r; par l'origine O, menons une transversale quelconque coupant la surface en n points, et donnée par les équations

$$x = az, \quad y = bz.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle se change en celle-ci :

$$(2)\qquad z^n f_n + z^{n-1} f_{n-1} \ldots + z^r f_r + \ldots + f_0 = 0;$$

dans cette équation, f_r désigne la fonction F_r dans laquelle on a remplacé x par a, y par b, et z par l'unité. Prenons sur la transversale un point Q, et soient X, Y, Z les coordonnées de ce point; on a

$$X = aZ, \quad Y = bZ.$$

Soit I_r l'un quelconque des n points d'intersection I_1, I_2,..., I_n; faisons $OI_r = t$, $OQ = q$; nous aurons évi-

demment

$$z = \frac{tZ}{q}.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (2), elle prend cette forme :

(3) $$\frac{t^n}{q^n}\varphi_n + \frac{t^{n-1}}{q^{n-1}}\varphi_{n-1} + \ldots \frac{t^r}{q^r}\varphi_r + \ldots \varphi_0 = 0,$$

où φ_r désigne la fonction F_r dans laquelle on a remplacé x, y, z par X, Y, Z. Cette nouvelle équation a pour racines les n segments $OI_1, \ldots, OI_n$. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $n+1$ constantes données, et supposons qu'on ait la relation *segmentaire*

(4) $$\alpha_n q^n + \alpha_{n-1} s_1 q^{n-1} + \alpha_{n-2} s_2 q^{n-2} + \ldots \alpha_r s_{n-r} q^r + \ldots \alpha_0 s_n = 0,$$

où s_r désigne le produit des n segments $OI_1, \ldots, OI_n$ pris r à r; or, en vertu de l'équation (3), on a

$$s_p = q^n \frac{(-1)^p \varphi_{n-p}}{q^{n-p}\varphi_n};$$

remplaçant $s_0, s_1, \ldots, s_n$ par leurs valeurs, dans l'équation (4), elle se change en celle-ci :

(5) $$\alpha_n F_n + \alpha_{n-1} F_{n-1} + \ldots \alpha_r F_r + \ldots \alpha_0 F_0 = 0;$$

c'est l'équation de la surface, lieu géométrique du point Q correspondant à la relation (4); on a mis légitimement F au lieu de φ.

Observation. Cette surface segmentaire est la plus générale de ce genre que l'on puisse avoir; car toute fonction symétrique algébrique entre des quantités se ramène à une relation entre des produits combinatoires.

6. Problème. Supposons que les coefficients $\alpha_n, a_{n-1}, \ldots$ jusqu'à α_{r+1} soient nuls; alors la relation (4) se réduit à

(6) $$\alpha_r s_{n-r} q^r + \alpha_{r-1} s_{n-r+1} q^{r-1} \ldots \alpha_0 s_n = 0;$$

on demande quelle relation il faut établir entre les coeffi-

cients α_r, $\alpha_{r-1}, \ldots$, α_0 pour que les n valeurs de t dans l'équation (3) devenant égales entre elles, les r valeurs de q dans l'équation (6) deviennent aussi égales entre elles et égales aux valeurs de t; ces conditions satisfaites, quel est le lieu du point Q?

Solution. Désignons par $n_{(p)}$ le nombre combinatoire de n objets pris p à p; les n valeurs de t devenant égales, ce que nous avons appelé ci-dessus s_p devient $n_p t^p$. Ainsi la relation (6) doit s'écrire ainsi :

$$\alpha_r n_{(r)} t^{n-r} q^r + \alpha_{r-1} n_{(r-1)} t^{n-r+1} q^{r-1} + \alpha_{r-2} n_{(r-2)} t^{n-r+2} q^{r-2} + \ldots = 0,$$

car $n_{(n-k)} = n_{(k)}$. Dans cette équation, la somme des r valeurs de q prises p à p est égale à

$$\frac{(-1)^p \alpha_{r-p} n_{r-p} t^{n-r+p}}{\alpha_r n_r t^{n-r}};$$

la somme des valeurs de t prises p à p est $r_p t^p$; donc, d'après la seconde condition,

$$\alpha_{r-p} n_{r-p} (-1)^p = \alpha_r n_r r_p;$$

La relation (6) peut donc s'écrire ainsi :

$$\sum_0 \frac{r_{(p)}}{n_{(r-p)}} s_{n-r+p} (-1)^p q^{r-p} = 0,$$

car le facteur $\alpha_r n_{(r)}$, étant constant, disparaît. Or

$$s_{n-r+p} = q^r \frac{(-1) \varphi_{r-p}}{q^{r-p} \varphi_{(n)}};$$

donc la dernière équation peut s'écrire, en ôtant le facteur commun φ_n,

$$\sum_0^r \frac{r_p}{n_{r-p}} \varphi_{r-p} = 0.$$

Or

$$r_p = \frac{[r]}{[r][r-p]}, \quad n_{r-p} = \frac{[n]}{[r-p][n-r+p]},$$

les crochets indiquent des produits continuels; donc, après avoir ôté les facteurs constants $[n]$ et $[r]$, l'équation se réduit à

$$\sum_0^r \frac{[n-r+p]}{[p]} \varphi_{r-p} = 0.$$

Mais

$$[n-r]\,(n+r+p)_p = \frac{[n-r+p]}{[p]};$$

donc, finalement,

$$\sum_0^r (n+r+p)_p \varphi_{r-p} = 0,$$

où $(n+r-p)_p$ est le nombre combinatoire de $n+r-p$ éléments pris p à p. Ainsi l'équation du lieu cherché est, après avoir changé φ en F,

$$\mathrm{F}_r + (n-r+1)\,\mathrm{F}_{r-1} + \frac{(n-r+2)\,(n-r+1)}{1.2}\,\mathrm{F}_{r-2}$$
$$+ \frac{(n-r+3)\,(n-r+2)\,(n-r+1)}{1.2.3}\,\mathrm{F}_{r-3} + \ldots = 0.$$

C'est cette surface que M. Grassmann désigne sous le nom de *surface centrale* d'ordre r, relativement à la surface donnée par l'équation (1) et à l'origine O, nommé *pôle;* c'est une polaire *successive* d'ordre $n-r$ de Bobillier (Gergonne, tome XIX, page 302; 1829).

Corollaire. La surface d'ordre 1 est un plan; c'est le plan des *centres harmoniques*. La surface d'ordre 2 est du second degré.

Observation. La condition analytique de ce problème correspond à cette condition géométrique : lorsque tous les points $I_1, I_2, \ldots, I_n$ se réunissent, les points Q se réunissent aux mêmes points; comme cela a lieu pour les divisions harmoniques. (*Suite*.)

IRRÉDUCTIBILITÉ

de l'équation $X = 1 + x + \ldots + x^{p-1} = 0$, p étant un nombre premier

(voir t. VIII, p. 419);

PAR M. E. PROUHET.

I. *Lemme* 1. Les diviseurs de X ne peuvent être que de la forme $\dot{p} + 1$, pour toute valeur entière de x qui n'est pas $p + 1$. (Théorème connu.)

Lemme 2. Une congruence de degré n ne peut avoir plus de n racines, lorsque le module est premier. (Théorème connu.)

THÉORÈME. X *ne peut être divisible par un polynôme de degré moindre, à coefficients entiers.*

Démonstration. Si un pareil diviseur $\varphi(x)$ pouvait exister, on aurait, d'après le lemme 1,

$$\varphi(0) = \dot{p} + 1, \quad \varphi(2) = \dot{p} + 1,$$
$$\varphi(3) = \dot{p} + 1, \ldots, \quad \varphi(p-1) = \dot{p} + 1,$$

et, dès lors, la congruence

$$\varphi(x) - 1 = \dot{p},$$

de degré inférieur à $p - 1$, aurait $p - 1$ racines, ce qui est contraire au lemme 2. Donc, etc.

Démonstration du lemme 1.

II. Soit θ un diviseur premier de X, en sorte que

$$X = \dot{\theta};$$

on aura

$$X(x-1) = x^p - 1 = \dot{\theta}.$$

Puisque p est un nombre premier, si $x - 1$ n'est pas $\dot{\theta}$, x^p est la première puissance de x qui soit $\dot{\theta} + 1$. Donc,

d'après le théorème de Fermat, p est un diviseur de $\theta - 1$, et l'on a, par conséquent,

$$\theta = \dot{p} + 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration précédente est en défaut quand $x - 1 = \theta$; mais cela ne peut arriver que si $\theta = p$; en effet, on a identiquement

$$\begin{aligned} x^p - 1 &= (x - 1 + 1)^p - 1 \\ &= (x-1)^p + \ldots + \frac{p(p-1)}{1.2}(x-1)^2 + p(x-1), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$X = (x-1)^{p-1} + \ldots + \frac{p(p-1)}{1.2}(x-1) + p.$$

Ce qui montre que X et $x - 1$ ne peuvent avoir d'autre facteur commun que p, et même que X ne peut jamais être divisible par p^2.

SOLUTION DE LA PREMIÈRE QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION

(voir p. 342) ;

PAR M. JULES ROUGET,
Professeur.

Les équations qui donnent le centre de courbure sont

$$\begin{aligned} &(x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz = 0, \\ &(x'-x)\,d^2x + (y'-y)\,d^2y + (z'-z)\,d^2z = ds^2, \\ &(x'-x)(dyd^2z - dzd^2y) + (y'-y)(dzd^2x - dxd^2z) \\ &\qquad + (z'-z)(dxd^2y - dyd^2x) = 0, \end{aligned}$$

dont les deux premières représentent deux plans normaux consécutifs et la troisième le plan osculateur au point x, y, z. Si, entre ces équations et les deux équa-

tions de la courbe donnée, on élimine x, y, z, on aura les équations du lieu des centres de courbure : l'équation de l'arête de rebroussement s'obtiendrait en éliminant x, y, z entre les équations de la courbe proposée, les deux premières équations ci-dessus et l'équation suivante, qui s'obtient en différentiant la seconde, et traitant l'arc s comme la variable indépendante

$$(x'-x)d^3x+(y'-y)d^3y+(z'-z)d^3z=0.$$

La question revient donc à démontrer que cette équation est vérifiée par les coordonnées x', y', z' du centre de courbure, lorsque ce rayon de courbure est constant, c'est-à-dire lorsque

$$(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2 \\ +(dxd^2y-dyd^2x)^2=\text{const.},$$

ce qui est le cas actuel, puisqu'en appelant ρ le rayon de courbure, on a toujours

$$\rho=\frac{ds^3}{\sqrt{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}}:$$

or on sait, par des formules connues, que les valeurs de $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ relatives au centre de courbure, sont les suivantes :

$$x'-x=\frac{\rho^2}{ds^4}[dy(dyd^2x-dxd^2y)+dz(dzd^2x-dxd^2z)],$$

$$y'-y=\frac{\rho^2}{ds^4}[dz(dzd^2y-dyd^2z)+dx(dxd^2y-dyd^2x)],$$

$$z'-z=\frac{\rho^2}{ds^4}[dx(dxd^2z-dzd^2x)+dy(dyd^2z-dzd^2y)].$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$(x'-x)d^3x+(y'-y)d^3y+(z'-z)d^3z=0,$$

elle devient

$$(dyd^3x - dxd^3y)(dyd^2x - dxd^2y)$$
$$+ (dzd^3y - dyd^3z)(dzd^2y - dyd^2z)$$
$$+ (dxd^3z - dzd^3x)(dxd^2z - dzd^2x) = 0,$$

équation différentielle exacte qui, intégrée, donne

$$(dyd^2x - dxd^2y)^2 + (dzd^2y - dyd^2z)^2$$
$$+ (dxd^2z - dzd^2x)^2 = \text{const.},$$

ce qui est précisément l'hypothèse. Cette hypothèse est donc nécessaire; réciproquement, si elle a lieu, la conséquence géométrique s'ensuit. (*Voir* tome VI, page 226; tome IV, pages 606 et 266; Moigno, *Calcul différentiel*, page 314.)

Cette solution nous a été remise le 23 *août au matin, lendemain de la composition.*

Avis sur les concours d'agrégation.

Nous donnerons les solutions de toutes les questions proposées dans ces concours jusqu'à ce jour, et même plusieurs solutions de la même question, lorsqu'elles différeront essentiellement. Nous engageons MM. les agrégés à nous adresser leurs travaux, qui seront naturellement insérés de préférence, puisqu'ils ont l'approbation du jury.

SOLUTIONS DES QUESTIONS 224 ET 225

(voir t. IX, p. 150);

Par M. l'abbé L. CLAUDE,
Du séminaire de Vals.

Question 224. *n droites* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *forment un faisceau plan; n droites* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *forment un se-*

cond faisceau plan ; dans quel cas pourra-t-on donner aux faisceaux une position telle, que les n intersections des rayons $a_1 b_1$, $a_2 b_2$,..., $a_n b_n$ soient sur une même droite? (Steiner.)

Solution. Soient i_1, i_2,..., i_n les intersections des rayons; prenant quatre rayons dans le premier faisceau et quatre correspondants dans le second, il faut donc que le rapport *anharmonique* des sinus soit le même de part et d'autre; et lorsque cette condition est remplie, on peut résoudre le problème d'une infinité de manières, comme dans la question 223 (*voir* page 266).

Question 225. *Mêmes données. Dans quel cas pourra-t-on donner aux faisceaux une position telle, que les plans passant par les rayons a_1, b_1, a_2, b_2,..., a_n, b_n se coupent suivant la même droite?* (Steiner.)

Solution. Lorsque les faisceaux auront la position demandée, il est évident que les points d'intersection i_1, i_2,..., i_n seront dans l'intersection des plans des faisceaux, c'est-à-dire en ligne droite. Faisant tourner un des faisceaux autour de la droite $i_1 i_2 \ldots i_n$, on revient à la question précédente (*voir* tome VI, page 68).

SUR LE PROBLÈME DE LA SPHÈRE TANGENTE A QUATRE PLANS DONNÉS;

Par E. CATALAN.

(Extrait de la Géométrie descriptive de Lafrémoire, 2e édition; 1849.)

1. Si l'on suppose que les quatre plans qui composent les faces d'un tétraèdre soient indéfiniment prolongés, on pourra se proposer de chercher toutes les sphères qui touchent à la fois ces quatre plans.

Afin de déterminer, en premier lieu, quel peut être le nombre de ces sphères, observons que le plan de la base ABC du tétraèdre, prolongé indéfiniment, forme, avec les trois autres faces, six angles dièdres dont trois sont *intérieurs*, et dont les trois autres sont *extérieurs*.

Pour qu'un point soit également distant des quatre faces du tétraèdre, il faut qu'il soit situé sur trois des plans bissecteurs de ces six angles dièdres. Si donc P, Q, R sont les plans bissecteurs des angles *intérieurs*, et que P', Q', R' soient les plans bissecteurs des angles *extérieurs*, il y aura autant de sphères satisfaisant à la question, qu'il y aura de points déterminés par les combinaisons suivantes des plans bissecteurs :

P, Q, R,	P, Q, R',	P, Q', R',	P', Q', R'.
	Q, R, P',	Q, R', P',	
	R, P, Q',	R, P', Q'.	

Le nombre de ces points, et par conséquent le nombre des sphères cherchées, est au plus égal à *huit*.

2. La sphère déterminée par les plans P, Q, R, c'est-à-dire la sphère *inscrite* au tétraèdre, existe toujours.

Il en est de même pour les *quatre* sphères déterminées par les plans

P, Q, R',
Q, R, P',
R, P, Q',
P', Q', R',

que l'on appelle *sphères ex-inscrites*, et qui sont telles, que chacune d'elles touche une des faces du tétraèdre et les prolongements des trois autres faces.

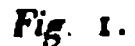
Considérons, par exemple, les trois plans bissecteurs P', Q', R'. Il est évident que chacun de ces plans fait,

avec le *prolongement* de la face ABC, *un angle dièdre aigu;* conséquemment, ces trois plans ne peuvent se couper deux à deux suivant des droites parallèles, de manière à former les faces d'un prisme triangulaire; donc *ils se coupent en un seul point, centre de la sphère ex-inscrite suivant la face* ABC. La même démonstration s'appliquerait aux sphères ex-inscrites suivant les trois autres faces, et il est facile de reconnaître que leurs centres seraient donnés par les combinaisons

$$P,\ Q,\ R',$$
$$Q,\ R,\ P',$$
$$R,\ P,\ Q',$$

des six plans bissecteurs.

3. Considérons maintenant le tétraèdre ABCD (*fig.* 1), et supposons que l'on prolonge ses différentes faces ainsi que l'indique la figure; il est clair que l'on obtiendra deux espaces indéfinis BCEFGH, ADIKLM, terminés chacun par quatre plans, et s'appuyant sur les deux arêtes opposées BC, AD. Ces espaces, dont la forme est assez bien indiquée par celle d'un *comble à quatre pentes,* ont été désignés sous le nom d'*angles prismatiques* et de *bi-angles*. On comprend que, dans certains cas, une sphère puisse être inscrite dans un angle prismatique. Il semblerait, d'après cette considération, que le nombre des sphères inscrites dans les *six* angles prismatiques obtenus en considérant ces trois couples d'arêtes opposées, puisse s'élever à six; mais il est aisé de démontrer que si l'on peut inscrire une sphère dans l'angle prismatique BCEFGH, on n'en pourra pas inscrire dans l'angle prismatique opposé, et réciproquement.


Fig. 1.

En effet, quelle que soit la position de la sphère cherchée, son centre doit se trouver sur les plans bissecteurs des angles dièdres *intérieurs* dont les arêtes sont AD et BC. Le premier plan bissecteur rencontre l'arète BC en un point U *situé entre* B et C. De même, le second plan bissecteur rencontre AD en un point V, *situé entre* A et D. Le centre cherché doit donc se trouver sur la droite UV, *intersection des deux plans bissecteurs*. Ce centre doit aussi se trouver sur le plan R', bissecteur de l'angle dièdre *extérieur* ayant pour arête AB; d'ailleurs une droite ne peut rencontrer un plan qu'en un seul point; donc, etc.

On peut observer encore que le plan R' est extérieur au tétraèdre, dans lequel est située la droite UV; donc

le centre de la sphère dont il s'agit sera *sur le prolongement* de UV, soit en O′, dans l'angle prismatique BCEFGH, soit en O″, dans l'angle prismatique ADIKLM.

S'il arrive que le plan R′ soit parallèle à la droite UV, alors le centre de la sphère est transporté à l'infini, ou plutôt cette sphère n'existe pas.

Au lieu de déterminer le centre O′ ou le centre O″ par l'intersection du plan P passant suivant BC, du plan R′ passant suivant AB et du plan bissecteur ADU, il est clair qu'on pourrait l'obtenir au moyen de la combinaison des plans P, R′ et Q′, en supposant que Q′ soit le plan bissecteur de l'angle dièdre extérieur dont l'arête est AC. Nous retombons ainsi sur la combinaison P, R′, Q′, indiquée plus haut.

Nous voyons donc que les sphères déterminées par les combinaisons

P, R′, Q′,
Q, P′, R′,
R, Q′, P′,

peuvent, en tout ou en partie, ne pas exister, c'est-à-dire que le nombre des solutions du problème peut être réduit à *cinq*. Mais peut-il s'élever à *huit*, à *sept* ou même à *six*? C'est ce qu'il convient d'examiner. Il faut bien remarquer en effet que, dans les développements qui précèdent, rien ne prouve qu'en général la droite UV rencontrera le plan R′, ou, ce qui est la même chose, que les plans P, R′, Q′ se couperont en un point unique.

4. Afin d'éclaircir cette partie de la question, nous commencerons par démontrer la proposition suivante.

Théorème I. *Dans tout tétraèdre, le plan bissecteur de chaque angle dièdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux aires des faces adjacentes.*

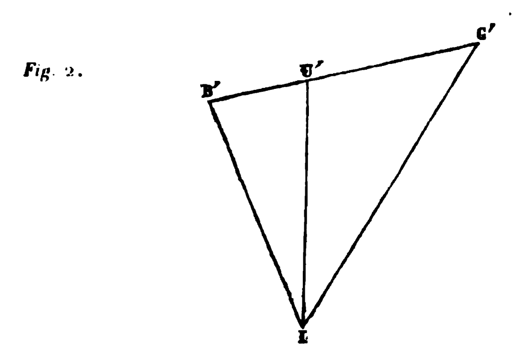
Considérons, par exemple, le plan AUD, qui divise

en deux parties égales l'angle dièdre intérieur dont l'arête est AD. Il s'agit de démontrer que

$$\frac{BU}{CU} = \frac{C}{B},$$

en représentant l'aire d'une face par la lettre qui indique le sommet opposé à cette face.

Projetons la figure sur un plan quelconque, perpendiculaire à AD. Cette droite aura pour projection un point I (*fig.* 2); et les plans ABD, AUD, ACD, étant perpendiculaires au plan de projection, auront pour traces des droites IB′, IU′, IC′ telles, que IU′ *sera la bissectrice de l'angle formé par* IB′ et IC′. Enfin la droite BUC se projettera suivant une droite B′U′C′.



Cela posé, le théorème de géométrie plane donne

$$\frac{B'U'}{C'U'} = \frac{B'I}{C'I}.$$

Mais il est clair que B′U′, C′U′ sont des droites proportionnelles à BU, CU, et que B′I, C′I sont égales, respectivement, aux perpendiculaires abaissées des points B, C sur la base AD des triangles ABD, ACD. La proportion précédente revient donc à celle qu'il s'agissait de démontrer.

5. Supposons qu'après avoir mené la droite UV, déterminée par les proportions

$$\frac{BU}{CU}=\frac{C}{B},\quad \frac{AV}{DV}=\frac{D}{A},$$

on mène, semblablement, la droite ST, qui rencontre les arêtes opposées AB, CD, de manière que

$$\frac{AS}{BS}=\frac{B}{A},\quad \frac{DT}{CT}=\frac{C}{D}.$$

D'après ce qui précède, *chacune de ces droites doit contenir le centre de la sphère inscrite au tétraèdre;* donc, puisque ce centre existe toujours, les deux droites se coupent. De là, ce théorème :

Théorème II. *Les droites qui partagent les arêtes opposées d'un tétraèdre, chacune en deux segments additifs proportionnels aux faces adjacentes à ses deux extrémités, se coupent toutes les trois en un même point, centre de la sphère inscrite au tétraèdre.*

6. Du reste, on peut démontrer directement que les droites UV, ST se coupent, en observant que les proportions précédentes donnent

$$AV.DT.CU.BS=AS.BU.BT.DV.$$

7. Au lieu de partager les arêtes en segments additifs, supposons qu'on les partage en segments soustractifs, de manière à satisfaire aux proportions

$$\frac{AX'}{CX'}=\frac{C}{A},\quad \frac{DY'}{BY'}=\frac{B}{D},\quad \frac{DT'}{CT'}=\frac{C}{D},\quad \frac{AS'}{BS'}=\frac{B}{A}.$$

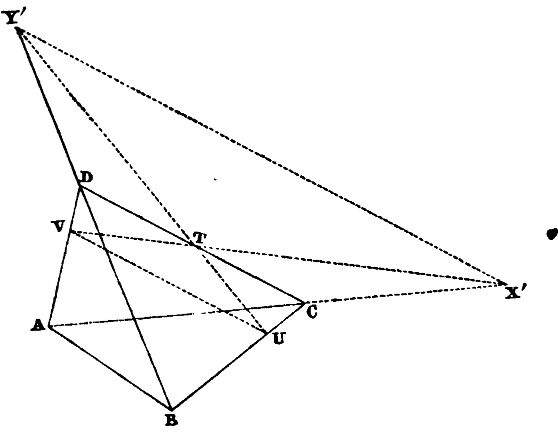
Comme ces proportions donnent

$$AS'.BY'.CX'.DT'=AX'.BS'.CT'.DY',$$

on conclut encore que les droites S'T', X'Y' sont dans un même plan. Donc, *en général*, elles se couperont en

un même point O', situé aussi sur la droite VU. Ce point sera le centre de l'une des sphères inscrites dans les angles prismatiques.

Fig. 3.



8. Pour que cette sphère n'existe pas, il faut que les droites UV, X'Y' (*fig.* 3), lesquelles sont *toujours dans un même plan*, soient parallèles entre elles. Cherchons dans quel cas aura lieu ce parallélisme.

Les proportions

$$\frac{AX'}{CX'}=\frac{C}{A},\quad \frac{CT}{DT}=\frac{D}{C},\quad \frac{DV}{AV}=\frac{A}{D},$$

donnent

$$AX'.CT.DV = CX'.DT.AV;$$

donc les points X', T, V sont en ligne droite, et AVX' est un triangle. A cause de la transversale DTC, nous aurons donc

$$AC.TX'.DV = AD.VT.CX'.$$

De même, UTY' est une droite; et le triangle BUY', coupé par la transversale DTC, donne

$$BC.UT.DY' = BD.TY'.CU.$$

Maintenant, les deux droites VU, X′Y′ étant supposées parallèles, on a

$$\frac{VT}{UT} = \frac{TX'}{TY'}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les deux premières égalités, et qu'on ait égard à cette dernière, on obtient

$$AC.BC.DV.DY' = AD.BD.CU.CX',$$

ou

$$\frac{AC}{CX'}.\frac{BC}{CU} = \frac{AD}{DV}.\frac{BD}{DY'}.$$

Mais, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître,

$$\frac{AC}{CX'} = \frac{C-A}{A}, \quad \frac{BC}{CU} = \frac{B+C}{B},$$

$$\frac{AD}{DV} = \frac{A+D}{A}, \quad \frac{BD}{DY'} = \frac{D-B}{B};$$

donc

$$(C-A)(B+C) = (A+D)(D-B),$$

ou

$$\frac{C-A}{D-B} = \frac{A+D}{B+C} = \frac{C+D}{C+D}.$$

Cette proportion exige que $A + D = B + C$.

Ainsi, pour que la sphère O′ disparaisse, *il faut et il suffit que la somme des aires des faces qui ont* AD *pour arête commune, soit équivalente à la somme des deux autres faces.*

9. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que l'on n'a pas, à la fois, $C = A$ et $D = B$. Si ces deux conditions étaient vérifiées, les points X′ et Y′ seraient transportés à l'infini, aussi bien que la sphère O′. En même temps, comme les sommes $A + B$ et $C + D$ seraient égales, la sphère inscrite dans l'un des angles prismatiques ayant pour arêtes AD ou CD, aurait un rayon

infini. C'est-à-dire que le nombre des sphères tangentes aux quatre plans serait réduit à *six*.

10. En résumé :

1°. *Quand la somme des aires de deux des faces du tétraèdre est égale à la somme des aires des deux autres faces, les sphères de la troisième espèce se réduisent à deux* ;

2°. *Si les faces du tétraèdre sont équivalentes deux à deux, il n'y a plus qu'une sphère de la troisième espèce ;*

3°. *Enfin, si les quatre faces du tétraèdre sont équivalentes entre elles, les sphères inscrites dans les angles prismatiques se transportent toutes les trois à l'infini.*

On vérifie ces conclusions en cherchant les relations qui existent entre les rayons des trois sphères, les aires des faces, et le volume V du tétraèdre ; ces relations sont

$$\pm V = \frac{1}{3} R_1 (A + B - C - D),$$

$$\pm V = \frac{1}{3} R_2 (A + C - B - D),$$

$$\pm V = \frac{1}{3} R_3 (A + D - B - C).$$

(*Voir* tome VI, page 253.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE, POUR L'ANNÉE 1850

(voir t. IX, p. 224).

Sujet de composition en Physique.

Principales expériences sur la décomposition et la recomposition de la lumière.

Par quelles méthodes peut-on déterminer la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs?

Questions de Mathématiques.

Application de la construction des courbes à la détermination des racines des équations. Trisection d'un angle (*voir* tome III, page 533).

On donne un point A, centre du cercle circonscrit à un triangle; le point G, centre de gravité du même triangle; le point B, centre du cercle inscrit; le point C d'intersection des trois hauteurs et leurs distances respectives : ces quatre points sont en ligne droite. Trouver la longueur des côtés du triangle, et construire les valeurs données par le calcul (*voir* tome I, pages 79, 196).

TÉTRAGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

(voir t. IX, p. 128);

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,
Professeur de mathématiques.

Appliquons au quadrilatère sphérique la méthode donnée pour le quadrilatère plan.

En conservant la même notation, on a

$$\cos b = \cos a \cos x + \sin a \sin x \cos \alpha,$$
$$\cos c = \cos d \cos x + \sin d \sin x \cos \beta,$$
$$\cos y = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos A;$$

d'où l'on tire

$$\cos \alpha = \frac{\cos b - \cos a \cos x}{\sin a \sin x},$$
$$\cos \beta = \frac{\cos c - \cos d \cos x}{\sin d \sin x},$$
$$\cos A = \frac{\cos y - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2 A + 2\cos\alpha\cos\beta\cos A = 0,$$

on obtient

$$\sin^2 b\cos^2 d + \cos^2 a\sin^2 c + \cos^2 b\cos^2 d + \cos^2 c\cos^2 x + \sin^2 x\cos^2 y$$
$$2(\cos a\cos c\cos x\cos y + \cos b\cos d\cos x\cos y + \cos a\cos b\cos c\cos d)$$
$$+ \cos^2 b\sin^2 c\cos^2 x$$
$$2(\cos a\cos b\cos x + \cos c\cos d\cos x + \cos a\cos d\cos y + \cos b\cos x\cos y)$$
$$+ \sin^2 b\sin^2 c\sin^2 x.$$

GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE (*)

(voir t. IV. p. 494; t. V, p. 17, 399, 414; t. VII, p. 14, 147, 232; t. VIII, p. 100, 435; t. IX, p. 141).

Cours de M. Stubbs.

1. Par les trois sommets d'un triangle sphérique on mène aux côtés respectifs opposés trois arcs de grand cercle se coupant en un point situé dans l'intérieur du triangle; σ, σ', σ'' sont les segments comptés du point commun d'intersection aux angles, et s, s', s'' les segments correspondants comptés du même point aux côtés; on a la relation

$$\frac{\sin s\cos\sigma}{\sin(s+\sigma)} + \frac{\sin s'\cos\sigma'}{\sin(s'+\sigma')} + \frac{\sin s''\cos\sigma''}{\sin(s''+\sigma'')} = 1.$$

2.

$$\alpha+\beta+\gamma = \tfrac{1}{2}\pi;\ (\sin\theta)^3 = \sin(\alpha-\theta)\sin(\beta-\theta)\sin(\gamma-\theta);$$

on a

$$\text{cotang}\,\theta = \text{cotang}\,\alpha + \text{cotang}\,\beta + \text{cotang}\,\gamma;$$
$$\text{coséc}^2\,\theta = \overline{\text{coséc}}^2\,\alpha + \overline{\text{coséc}}^2\,\beta + \overline{\text{coséc}}^2\,\gamma.$$

(*) Extrait d'un programme de l'Université de Dublin, 1846.

3. PROBLÈME. *Étant donné un triangle sphérique, trouver dans son intérieur un point tel, que si l'on joint ce point aux sommets par des arcs de grand cercle, les milieux de ces arcs soient les sommets d'un triangle donné.*

Cours de M. TOWNSEND.

4. ρ et ρ' désignent les rayons sphériques de deux petits cercles de la sphère; δ la distance sphérique des pôles des deux petits cercles; K le quotient du sinus d'un arc divisé par le sinus du côté opposé dans le triangle ρ, ρ', δ; l'aire de la portion de sphère interceptée entre les deux arcs de petit cercle est égale à

$$2\,[\text{arc sin} = (\mathrm{K}\sin\delta) - \cos\rho\ \text{arc sin}(\mathrm{K}\sin\rho') - \cos\rho'\ \text{arc sin} = (\mathrm{K}\sin\rho)]$$

5. PROBLÈME. *Par un point donné sur la sphère, mener un arc de grand cercle coupant deux grands cercles donnés, de manière que l'aire interceptée soit égale à une aire donnée ou soit un minimum.*

6. Par le sommet d'un triangle sphérique on mène deux tangentes à un petit cercle donné; ces tangentes coupent le côté opposé à l'angle en deux points; par ces deux points menons deux nouvelles tangentes au même petit cercle; joignant le point d'intersection de ces deux tangentes avec le sommet de l'angle opposé, les trois arcs de grand cercle ainsi obtenus, au moyen des trois angles, se coupent en un même point.

7. PROBLÈME. *Trouver le lieu d'un point sur la sphère, duquel menant des arcs tangents à deux petits cercles donnés, le rapport des cosinus de ces arcs soit donné.*

NOTE SUR LE CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE;

PAR M. LOUIS THOMAS.

Supposons que l'on ait une équation différentielle entre la variable indépendante x, sa fonction y et les dérivées successives de cette fonction

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^my}{dy^m}\right) = 0,$$

et que l'on veuille, au moyen de la relation

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dy^n}, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^pz}{dx^p}\right) = 0,$$

transformer la première équation en une autre qui ne contienne que x, z et les dérivées de x par rapport à z, considérée comme nouvelle variable indépendante. Pour y parvenir, on différentiera n fois $F = 0$ et m fois $\varphi = 0$ par rapport à x. On aura ainsi $m + n + 2$ équations contenant y, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}}$ que l'on pourra éliminer, et il restera une équation contenant x, z, $\frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^{p+m}z}{dx^{p+m}}$ que l'on pourra transformer en une autre contenant x, z, $\frac{dx}{dz}, \ldots, \frac{d^{m+p}z}{dx^{m+p}}$ au moyen des relations

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dz}\right)}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dz}\right)}, \ldots,$$

ce qu'il fallait obtenir.

Si l'on avait voulu une équation finale contenant y, z, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, ..., on aurait préparé les équations

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0$$

de manière qu'elles continssent, au lieu des dérivées de y et de z par rapport à x, les dérivées de x et de y par rapport à z prise pour variable indépendante au moyen des relations

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dz}\right)}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \ldots, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dz}\right)}{\left(\frac{dx}{dz}\right)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \ldots,$$

et l'on différentierait la première équation résultante n fois et la seconde m fois pour éliminer x et toutes les dérivées par rapport à z.

En général, soient $k - 1$ équations différentielles

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_{k-1} = 0,$$

entre k fonctions y, z, ..., v, u, t de la variable indépendante x et cette valeur elle-même, outre l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots,\right) = 0,$$

qui donne y en fonction de x. Si l'on veut obtenir une équation ne contenant que x, t et les dérivées de x par rapport à t prise pour nouvelle variable indépendante, on différentiera α fois chacune des k équations

$$F = 0, \quad \varphi_1 = 0, \ldots, \quad \varphi_{k-1} = 0$$

par rapport à x, et l'on déterminera α de manière que le nombre total des équations $k\alpha + k$ soit supérieur d'une unité au nombre des quantités à éliminer, lesquelles sont y, x, ..., v, u et leurs dérivées par rapport à x. Soient

donc m, n,..., p, q les ordres des dérivées les plus élevées de y, z, ..., v, u qui entrent dans les k équations données; après les avoir différentiées α fois, on aura les dérivées de y jusqu'à l'ordre $m+\alpha$, celles de z jusqu'à l'ordre $n+\alpha$, celles de v jusqu'à l'ordre $p+\alpha$, et celles de u jusqu'à l'ordre $q+\alpha$. On aura donc à éliminer

$m+\alpha+1+n+\alpha+1+\ldots+p+\alpha+1+q+\alpha+1$ quantités

ou

$$m+n+\ldots+p+q+(k-1)\alpha+k-1,$$

ou

$$m+n+\ldots+p+q-\alpha+k\alpha+k-1 \text{ quantités.}$$

Pour que ce nombre soit inférieur d'une unité à $k\alpha+k$, nombre des équations, il faut et il suffit qu'on ait

$$m+n+\ldots+p+q=\alpha.$$

Si r est l'ordre de la dérivée la plus élevée de t, entrant dans les équations primitives

$$F=0, \quad \varphi_1=0, \ldots, \quad \varphi_{k-1}=0,$$

on aura une équation finale contenant x, t et les dérivées de t par rapport à x jusqu'à l'ordre $r+\alpha$, qu'on transformera aisément en une équation contenant α, t et les dérivées de x par rapport à t aussi jusqu'à l'ordre $r+\alpha$. C'est ce qu'il s'agissait d'obtenir.

Si l'on avait demandé une équation finale contenant u, t et les dérivées de u par rapport à t, on aurait préparé les équations de manière qu'elles continssent les mêmes variables et les dérivées de toutes excepté t par rapport à t prise pour nouvelle variable indépendante, et l'on aurait ensuite opéré comme on vient de le dire.

EXERCICE NUMÉRIQUE.

Démontrer que les deux équations suivantes n'ont aucune racine réelle :

1°. $5797x^4 + 4951x^3 + 5892x^2 + 2876x + 6942 = 0$;
2°. $3447x^6 + 14560x^5 + 22430x^4 + 25857x^3 + 29193x^2 + 11596x + 5602 = 0$.

On trouve ces équations dans le célèbre Mémoire de M. Le Verrier sur la planète *Uranus* (*Connaissance des Temps*, 1849; Additions, page 174).

PROGRAMME D'UN COURS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE,

TROISIÈME ARTICLE (voir page 243 de ce volume);

PAR M. C.-E. PAGE.

Du centre des moyennes distances pris pour centre de rotation.

25. Ce qui précède suffit pour démontrer que dans tout système, il existe un centre des moyennes distances; c'est-à-dire un point tel, que la somme des distances de tous les autres points du système à un plan quelconque passant par ce point est nulle. Maintenant, nous allons démontrer que, lorsque le centre des moyennes distances est pris pour centre de rotation, la somme des projections sur une droite quelconque de toutes les vitesses dues à la rotation est toujours nulle.

Les vitesses dues à la rotation sont toutes perpendi-

culaires à l'axe instantané; par conséquent, leurs projections sur cet axe sont nulles. Nous n'avons donc à nous occuper que des projections sur une direction perpendiculaire à l'axe.

Par un des points A du système (*fig.* 1), menons perpendiculairement à l'axe instantané un plan qui le rencontre en O. La vitesse Am due à la rotation est située dans ce plan, perpendiculairement au rayon OA. En appelant ω la vitesse angulaire, on a

$$\mathrm{A}m = \mathrm{OA}.\omega.$$

Projetons cette vitesse Am sur une droite OX perpendiculaire à l'axe. Soit pq cette projection; nous aurons

$$pq = mn.$$

Les triangles semblables OAp, Amn donnent

$$mn : \mathrm{A}m :: \mathrm{A}p : \mathrm{OA};$$

d'où

$$pq = mn = \frac{\mathrm{A}m.\mathrm{A}p}{\mathrm{OA}}.$$

Remplaçons Am par sa valeur OA.ω; il vient

$$pq = \mathrm{A}p.\omega.$$

Cette projection reste la même sur toute droite parallèle à OX; donc, pour un point quelconque, la projection sur une droite parallèle à OX de la vitesse due à la rotation, est égale au produit de la vitesse angulaire ω par la distance de ce point à un plan mené par l'axe instantané et par la droite OX. La somme des projections est égale au produit de la vitesse angulaire par la somme des distances de tous les points du système à ce plan. Or si l'axe instantané et, par suite, le plan sont assujettis à passer par le centre des moyennes distances, la somme des distances est nulle; donc la somme des projections est nulle.

Puisque la somme des projections est nulle sur l'axe instantané et sur une direction perpendiculaire à cet axe, elle est nulle sur une direction quelconque.

Nous pouvons donc conclure que, quel que soit le mouvement d'un système, la vitesse du centre des moyennes distances est la moyenne des vitesses de tous les autres points du système; par conséquent le mouvement de ce point représente le mouvement général de translation.

Cette propriété du centre des moyennes distances est la base d'un des principes fondamentaux de la mécanique.

Vitesses virtuelles.

26. Le mot virtuel veut dire : qui existe en germe; ainsi l'on doit entendre par vitesse virtuelle d'un point, une vitesse dont ce point n'est pas actuellement animé, mais qu'il est susceptible de prendre.

Par exemple, si un corps est assujetti à se mouvoir d'un mouvement de translation suivant une seule direction, les vitesses virtuelles de tous ses points sont égales entre elles et parallèles à cette direction.

Si un corps est assujetti à se mouvoir d'un mouvement de translation suivant une direction quelconque, les vitesses virtuelles de tous ses points sont égales et parallèles entre elles; on indique que la direction et la vitesse du mouvement de translation peuvent être quelconques, en faisant varier arbitrairement les projections des vitesses virtuelles sur trois axes rectangulaires fixes.

Si un corps est assujetti à tourner autour d'un axe fixe, la vitesse virtuelle de chaque point est perpendiculaire à l'axe et au rayon, et les vitesses virtuelles des différents points sont entre elles comme les distances de ces points à l'axe.

Si un corps est assujetti à tourner autour d'un point

fixe, la vitesse virtuelle de chaque point est décomposée en trois composantes dues aux vitesses angulaires autour de trois axes rectangulaires. On indique que la direction et la grandeur de l'axe instantané sont quelconques, en faisant varier arbitrairement les trois vitesses angulaires composantes.

Si un corps entièrement libre peut se mouvoir d'une manière quelconque dans l'espace, la vitesse virtuelle de chaque point se décompose en deux composantes, l'une due au mouvement possible de rotation autour d'un point, l'autre due au mouvement possible de translation de ce point. On indique que les vitesses de translation et de rotation peuvent être quelconques, en faisant varier arbitrairement les projections sur trois axes rectangulaires fixes, de l'axe instantané et de la vitesse de translation.

Des machines.

27. Les machines peuvent être envisagées sous plusieurs points de vue différents; dans cette première partie de la mécanique, où nous ne nous occupons que du mouvement considéré indépendamment des causes qui le produisent, nous adopterons la définition suivante : les machines sont des corps ou des assemblages de corps assujettis à se mouvoir suivant certaines conditions et destinés à transmettre et à modifier les mouvements qui leur sont communiqués.

On conçoit qu'au moyen de points fixes et d'obstacles convenablement placés, on puisse restreindre les mouvements possibles de manière à établir entre les différentes parties d'un assemblage de corps, une dépendance telle, que si l'une de ces parties reçoit un certain mouvement, une autre partie prenne le mouvement qu'on veut obtenir. Il faut donc que les obstacles soient tellement disposés,

qu'ils établissent une relation déterminée entre les vitesses virtuelles des différents points mobiles.

Les mouvements dont on a le plus ordinairement besoin dans les arts, et ceux dont on peut disposer, sont le mouvement rectiligne continu et alternatif, et le mouvement circulaire continu et alternatif. La plupart des machines ont pour but de transmettre un de ces mouvements en changeant sa direction et sa grandeur, ou de transformer un de ces mouvements en un autre.

Sous le rapport seul de la transmission des mouvements, les machines offrent encore une mine inépuisable à l'esprit de recherches et d'invention, leur étude forme une des branches les plus intéressantes de la géométrie descriptive. Nous nous bornerons ici à l'indication sommaire de quelques machines simples qui constituent ordinairement les organes élémentaires des machines composées.

Du levier.

Le levier est une verge inflexible assujettie à tourner autour d'un point fixe.

Si l'on se borne à ne considérer que les points mobiles situés sur une même droite passant par le point fixe, il est facile de voir que leurs vitesses virtuelles sont toutes parallèles entre elles et dans le rapport des distances au point fixe.

Mais si l'on considère des points dans toutes les positions possibles, on doit entendre par levier un corps de forme quelconque assujetti à tourner autour d'un point fixe. Alors, sa théorie rentre dans la théorie générale de la rotation autour d'un point.

Dans les machines composées, on désigne ordinairement sous le nom de levier, tout organe formé d'une verge inflexible droite ou courbe, assujettie à tourner

autour d'un axe fixe et destinée à transmettre un mouvement circulaire autour de cet axe. La vitesse virtuelle de chaque point est dirigée perpendiculairement à l'axe et au rayon et proportionnelle à ce rayon.

Du treuil.

Le treuil (tour ou cabestan) est un cylindre assujetti à tourner autour de son axe et sur lequel s'enroule une corde qui transmet le mouvement. On met le cylindre en jeu au moyen d'une roue concentrique d'un diamètre plus grand. Si l'on prend deux points situés, l'un sur la circonférence de la roue, l'autre sur la corde, on voit que la vitesse virtuelle du premier est à celle du second comme le rayon de la roue est au rayon du cylindre, ou (en tenant compte de l'épaisseur de la corde) comme le rayon de la roue est au rayon du cylindre augmenté du rayon de la corde.

Le treuil sert à transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne, ou à transmettre un mouvement de rotation d'un axe à un autre : pour cela, il faut que la corde d'un treuil s'enroule sur la roue d'un autre.

Si l'on imagine une série de treuils tels, que la corde du premier s'enroule sur la roue du deuxième, la corde du deuxième sur la roue du troisième, et ainsi de suite; puis qu'on compare les vitesses virtuelles de deux points situés, l'un sur la roue du premier treuil, l'autre sur la corde du dernier, on verra que la vitesse virtuelle du premier point est à la vitesse virtuelle du second comme le produit des rayons des roues est au produit des rayons des cylindres.

Pour transmettre le mouvement de rotation autour d'axes différents, au lieu de treuils, on fait plus souvent usage de roues dentées; c'est-à-dire de roues tangentes l'une à l'autre et garnies de dents à leurs circonférences, de manière que l'une ne puisse tourner sans entraîner l'autre. Les roues dentées sont fréquemment employées dans la

composition des machines, leurs dispositions varient à l'infini; mais il est presque toujours extrêmement facile de déterminer les vitesses virtuelles des points mobiles entre lesquels elles établissent une dépendance.

Les autres principaux organes élémentaires qui entrent dans la composition des machines, sont : les plans inclinés, les vis, les poulies, les excentriques, les bielles, les balanciers, etc. ; nous n'entreprendrons pas la description de ces machines qui nécessiterait des développements étendus et de nombreuses figures. Le peu que nous avons vu suffit pour faire comprendre comment, lorsqu'on connaît dans une machine la disposition des points fixes et des obstacles, on peut déterminer les relations qui existent entre les vitesses virtuelles des points mobiles. Cette relation entre les vitesses virtuelles renferme presque toute la théorie de la machine, non-seulement sous le rapport de la transmission des mouvements, mais encore, comme on le verra plus tard, sous le rapport de l'équilibre des forces et de la transmission du travail mécanique (*).

(*Suite.*)

RESOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS DU SECOND, TROISIÈME ET QUATRIÈME DEGRÉ;

D'APRÈS CAGNOLI.

DEUXIÈME DEGRÉ.

1. *Formes des équations :*

(1) $$x^2 + px = q,$$

(2) $$x^2 - px = q,$$

(3) $$x^2 + px = -q,$$

(4) $$x^2 - px = -q.$$

(*) A lire cet article après celui qui finit page 97.

Dans ces quatre formes, p et q sont des quantités positives.

2. *Première forme :*

$$x = -\frac{1}{2}p\left[1 \mp \left(1 + \frac{4q}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Posons

$$\text{tang}\,A = \frac{2\sqrt{q}}{p};$$

on trouve

$$x = \sqrt{q}\,.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}A, \quad x = -\sqrt{q}\,.\,\cot\frac{1}{2}A.$$

3. *Deuxième forme.* Faisant $x = -y$, on revient à la première forme.

4. *Troisième forme :*

$$x = -\frac{1}{2}p\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right].$$

Premier cas. *Racines réelles.* Faisons

$$\sin A = \frac{2\sqrt{q}}{p}, \quad x = -q^{\frac{1}{2}}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}A, \quad x = -q^{\frac{1}{2}}\cot\frac{1}{2}A.$$

5. *Exemple :*

$$x^2 + \frac{7}{44}x = \frac{1695}{12716},$$

$$x = \text{tang}\,\frac{1}{2}A\sqrt{\frac{1695}{12716}}.$$

log 1695 = 3,2291697
log 12716 = 5,8956495

somme = 9,1248192
demi-somme = 9,5624096

$$\log 88 = 1,9444827$$
$$\text{compl} \log 7 = 9,15490196$$
$$\log \operatorname{tang} A = 0,6617942 = \log \operatorname{tang} 77^\circ 42' 31'',72$$

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = 9,9061115$$
$$\text{demi-somme} = 9,5624096$$
$$\log x = 9,4685211 = \log 0,2941176$$
$$\text{compl} \log = -0,5314789 = \log \frac{1}{3,4} = \log \frac{5}{17}$$
$$x = \frac{5}{17}.$$

Second cas. *Racines imaginaires*. Ces racines ont la forme

$$a \pm bi = a\left(1 \pm \frac{b}{a} i\right) = a\,(1 + i \operatorname{tang} A)$$

$$= \frac{a}{\cos A}(\cos A + i \sin A) = \frac{b}{\sin A}(\cos A \pm i \sin A) = \frac{be^{\pm iA}}{\sin A}.$$

6. *Quatrième forme*. Faisant $x = -y$, on revient à la précédente forme.

TROISIÈME DEGRÉ.

I.

Il y a quatre formes à une racine réelle et deux à trois racines réelles.

Formes à une seule racine réelle.

Première forme :

$$x^3 + px + q = 0,$$
$$y^3 = -\frac{1}{2} q \left[1 + \left(1 + \frac{4p^3}{27q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$
$$z^3 = -\frac{1}{2} q \left[1 - \left(1 + \frac{4p^3}{27q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right];$$

(1) $$\tang^2 B = \frac{4p^3}{27q^2} = \frac{p^2}{9q^2}R^2, \quad p = \frac{3}{4}R^2,$$

$$\tang B = \frac{R^3}{4q}, \quad q = \frac{R^3}{4 \tang B},$$

$$x = -\frac{R}{2}\left(\cot^{\frac{1}{3}} B - \tang^{\frac{1}{3}} B\right),$$

(2) $$\tang A = \tang^{\frac{1}{3}} \frac{B}{2},$$

(3) $$x = -R.\cot 2A = -2\sqrt{\frac{1}{3}p}.\cot 2A.$$

Ainsi, on peut calculer x par *logarithmes,* au moyen des trois équations (1), (2), (3).

Deuxième forme :

$$x^3 + px - q \quad \text{et} \quad 4p^3 < 27q^2;$$

on fait

(1) $$\tang^2 B = \frac{4p^3}{27q^2},$$

(2) $$\tang A = \tang^{\frac{1}{3}} \frac{B}{2},$$

(3) $$x = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2A.$$

Troisième forme :

$$x^3 - px + q = 0 \quad \text{et} \quad 4p^3 < 27q^2;$$

(1) $$\sin^2 B = \frac{4p^3}{27q^2},$$

(2) $$\tang A = \tang^{\frac{1}{3}} \frac{B}{2},$$

(3) $$x = -\frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2A}.$$

Quatrième forme :

$$x^3 - px - q = 0;$$

(1) $$\sin^2 B = \frac{4q^3}{27q^2},$$

(2) $$\tang A = \tang^{\frac{1}{3}} \frac{B}{2},$$

(3) $$x = \frac{2\sqrt[3]{\frac{p}{3}}}{\sin 2A}.$$

II.

Cas irréductibles. — Trois racines réelles.

Lemme. On a l'équation

$$\sin^3 A - \frac{3}{4} R^2 \sin A + \frac{1}{4} R^2 \sin 3A = 0;$$

les sinus sont pris dans le cercle dont le rayon est R. sin 3 A étant connu, les trois racines sont

$$\sin A, \quad \sin(60^\circ - A), \quad \sin(60^\circ + A).$$

Première forme :

$$x^3 - px + q = 0, \quad 4p^3 \geqq 29q^2;$$

$$p = \frac{3}{4} R^2, \quad R = 2\sqrt{\frac{p}{3}},$$

$$q = \frac{R^2}{4} \sin 3A = \frac{p}{3} \sin 3A,$$

$$\sin 3A = \frac{3q}{p},$$

$$x = \sin A,$$

dans le cercle dont le rayon est R;

$$x = R \sin A = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin A,$$

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60^\circ - A),$$

$$x = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60^\circ + A),$$

le rayon étant égal à l'unité.

Seconde forme :

$$x^3 - px - q = 0, \quad 4p^3 > 27q^2 \quad \text{ou} \quad = 27q^2;$$

comme ci-dessus,

$$\sin 3A = \frac{3q}{p}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}p}},$$

$$x = -\sin A \,.\, 2\sqrt{\frac{1}{3}p},$$

$$x = -\sin(60^\circ - A) \,.\, 2\sqrt{\frac{1}{3}p},$$

$$x = \sin(60^\circ + A) \,.\, 2\sqrt{\frac{1}{3}p},$$

le rayon étant égal à l'unité.

Observation. Les équations trigonométriques relatives à la multiplication d'un arc donnent les racines des équations algébriques qui sont susceptibles d'être identifiées avec les équations trigonométriques. C'est ainsi que Viète a résolu une équation du quarante-cinquième degré.

Cas irréductible. — Exemple numérique (Cagnoli, deuxième édition, page 225).

$$x^3 - \frac{403}{441}x + \frac{46}{147} = 0,$$

$$\sin 3A = \frac{414}{403} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1612}{1325}}},$$

$$x = \sin A \,.\, \sqrt{\frac{1612}{1325}},$$

$$x = \sin(60^\circ - A)\sqrt{\frac{1612}{1325}},$$

$$x = -\sin(60^\circ + A)\sqrt{\frac{1612}{1325}}.$$

$$\begin{aligned}
\log 1612 &= 3,2073650\\
\text{compl}\log 1325 &= 6,8784402\\
\text{somme} &= 0,0858052\\
\text{demi-somme} &= 0,0429029 \ \log\text{const.}\\
\text{compl}\log\text{const.} &= 9,9570974\\
\log 414 &= 2,61700034\\
\text{compl}\log 403 &= 7,39469495\\
\log\sin 3A &= 9,9687927 \doteq \log\sin 68^\circ\, 32'\, 18'',55\\
\log\sin A &= 9,5891206\\
\log\text{const.} &= 0,0429026\\
\log x &= 9,6320232 = \log 0,4285714\\
\text{compl}\log x &= -\,0,3679768 = \log\frac{1}{2,33333} = \log\frac{3}{7},
\end{aligned}$$

$$x = \frac{3}{7}.$$

$$\begin{aligned}
\log\sin(60^\circ - A) &= 9,7810061\\
\log\text{const.} &= 0,0429026\\
\log x &= 9,8239087 = \log 0,6666666 = \log\frac{2}{3},
\end{aligned}$$

$$x = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{7} = \frac{23}{21};$$

donc

$$x = -\frac{23}{21}.$$

QUATRIÈME DEGRÉ.

On ne peut résoudre trigonométriquement que la *réduite* qui est du troisième degré.

Note historique. Cagnoli (Antoine), né à Zante, en 1743, fils du chancelier de la république de Venise, étudia avec succès le grec et diverses parties de la philosophie. Il habita longtemps Vérone et y a formé, *à ses frais*, un observatoire dans sa maison; fut nommé, en 1798, professeur à l'École militaire de Modène, et est mort le 6 août 1818.

Ses principaux ouvrages sont :

1°. *Trigonometria plana et spherica.*

Il a publié cet ouvrage en italien et en français, en 1786, pendant un sejour qu'il fit à Paris. Une seconde édition, beaucoup améliorée, a paru, à Bologne, en 1804; c'est cette seconde édition que M. Chompré (N.-M.) a traduite en 1808; in-4°; Courcier.

C'est encore la Trigonométrie la plus complète, la plus scientifique que nous possédions; véritable ouvrage de bibliothèque (*).

2°. *Traité des sections coniques.*

3°. *Mémoire sur la figure de la Terre* (tome VI des *Transactions de la Société italienne.*) Cagnoli était, depuis 1808, président de cette Société.

Chompré (N.-M.), traducteur de la Trigonométrie, né, à Paris, le 23 septembre 1750, et mort, à Ivry-sur Seine, le 24 juillet 1825, a traduit le Mémoire de Cavendish sur la Densité de la Terre (*Journal de l'École Polytechnique,* tome X; 1815); il a appartenu à une famille de littérateurs.

(*) Nous ne connaissons pas encore la Trigonométrie de M. Serret, ouvrage dig ne sans doute de la position scientifique du célèbre auteur.

LIGNES DU TROISIÈME ORDRE.

Observation. Ces lignes ont des propriétés en commun avec toutes les courbes planes. Pour les trouver, il suffit de faire $n = 3$ dans l'article intitulé : *Propriétés générales des courbes planes* (page 283).

Ici nous ne nous occupons que des propriétés appartenant particulièrement à ces courbes, et, soit dit en passant, c'est ainsi qu'on devrait traiter les *éternelles* courbes du second degré.

1. THÉORÈME. *Si par un point* M *pris sur la courbe on mène une transversale* MNP *coupant la courbe en* N *et* P; *que l'on prenne sur cette transversale un point* O *harmonique relativement aux points* M, N P; *le lieu du point* O *sera une conique*.

Démonstration. Conséquence d'un théorème général qui sera démontré plus loin.

En voici une démonstration particulière.

Soit $F_3 + F_2 + F_1 = 0$, l'équation de la courbe, les axes étant rectangulaires ; l'origine sur la courbe ; F indique une fonction à deux coordonnées d'un degré marqué par l'indice. Faisant

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

on trouve

$$z^2 Q_3 + z Q_2 + Q_1 = 0 ;$$

le lieu du point harmonique O est donné par l'équation

$$2 Q_1 + Q_2 z = 0, \quad Q_1 z = F_1, \quad Q_2 z^2 = F_2.$$

Repassant aux coordonnées rectangulaires, on a pour

équation du lieu,

$$F_2 + 2F_1 = o,$$

qui est du second degré. Prenons la tangente en M pour axe des x; l'équation du lieu du point O sera de la forme

$$Ay^2 + By + Cx^2 + 2Dy = o,$$

qui se réduit en un point si l'on a

$$B^2 - 4AC < o \quad \text{et} \quad CD^2 = o,$$

et à deux droites si l'on a

$$B^2 - 4AC > o \quad \text{et} \quad CD^2 = o.$$

Si $D = o$, l'origine est un point multiple; les deux droites passent par l'origine. Si $C = o$, l'origine est un point d'inflexion; une des droites touche la courbe à l'origine et l'autre ne passe pas par l'origine.

Remarque. Chaque transversale coupe la conique en deux points; un point correspond à la moyenne harmonique $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{MP} + \frac{1}{MN}\right)$, et l'autre à la moyenne $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{NP} + \frac{1}{NM}\right)$.

Corollaire. La conique coupe la courbe en six points, savoir: un point *double* M à l'origine du faisceau, et quatre points simples. Ainsi, par un point donné sur la courbe, on ne peut mener que cinq tangentes à la courbe: une tangente au point même et comptant pour deux, et quatre autres dont les points de contact sont sur une conique qui touche la courbe au point donné. Lorsque le point donné M est à l'infini, l'asymptote est la tangente qui passe par le centre du faisceau. Les quatre autres tangentes sont parallèles à cette asymptote, et les quatre points de contact sont sur une hyperbole ayant l'asymptote donnée en commun avec la courbe.

2. Théorème. *Si le point* M *est un point d'inflexion, la conique se réduit à deux droites dont l'une est la tangente en* M. (Chasles.)

Démonstration. Prenons la tangente en M pour axe des x; alors F_2 et F_1 sont de la forme

$$F_2 = Ay^2 + Bxy, \quad F_1 = Dy.$$

Donc le lieu du point O est représenté par

$$Ay^2 + Bxy + 2Dy = 0;$$

d'où

$$y = 0, \quad Ay + Bx + 2D = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. Par un point d'inflexion, on ne peut mener que trois tangentes; les points de contact sont sur la droite dont l'équation est

$$Ay + Bx + 2D = 0.$$

3. Théorème. *Par le point d'inflexion* M, *menons une transversale coupant la courbe en deux points* P *et* Q, *les tangentes en* P *et* Q *se coupent en un point qui est sur la droite représentée par*

$$Ay + Bx + 2D = 0 \quad \text{(théorème précédent).}$$

Démonstration. Les tangentes en P et Q rencontrent la courbe en P′ et Q′; les trois points M, P′, Q′ sont en ligne droite (théorème 4 ci-dessous); soient O et O′ les centres harmoniques sur la transversale MPQ, MP′Q′; ces centres sont la droite

$$Ay + Bx + 2D = 0;$$

et, d'après la propriété du quadrilatère, les intersections des droites PP′, QQ′ sont aussi sur cette droite.

C. Q. F. D.

4. Théorème. *Une transversale coupant la courbe en trois points, si, en ces points, on mène des tangentes, elles coupent la courbe chacune en un point, et les trois points sont en ligne droite.*

Démonstration. Conséquences du théorème général (*voir* page 287, théorème 12).

5. Théorème. *Une ligne du troisième degré a neuf points d'inflexion, sur le nombre desquels il y en a nécessairement un de réel et au plus trois points qui sont toujours en ligne droite.*

Démonstration. Les coordonnées des points d'inflexion sont les racines d'une équation du neuvième degré (*voir* page 294) ; il y a donc au moins une racine réelle. Supposons qu'il y ait plus d'une racine réelle. Soient I et I' deux points d'inflexion; la droite II' rencontre la courbe en un troisième point I''; les tangentes menées en I, I', I'' rencontrent la courbe en trois points qui sont sur une ligne droite, dite *droite de rencontre* (théorème 4). Or les tangentes aux points d'inflexion I et I' ont un point de contact *triple ;* donc I et I' se confondent avec les points de rencontre. Ainsi la droite $II'I''$ est elle-même la droite de rencontre ; donc I'' est aussi un point d'inflexion. Soit I''' un quatrième point d'inflexion ; il est nécessairement hors de la droite $II'I''$. Chacune des droites II''', $I'I'''$, $I''I'''$ donnerait un nouveau point d'inflexion, et, en continuant, on obtiendrait un nombre indéfini de points d'inflexion ; donc il n'existe pas de quatrième point réel d'inflexion.

Observation. Prenons un point d'inflexion pour origine des coordonnées. Les six points d'inflexion imaginaires fournissent trois droites réelles (*voir* tome V, page 423) qui passent par l'origine.

6. Théorème. *Si, par un point* M, *on mène trois droites, et si l'on prend deux points sur chaque droite ; par ces sept points, passent une infinité de lignes du troisième ordre. Si le point* M *est un point d'inflexion pour une de ces courbes, il sera aussi un point d'inflexion pour toutes ces courbes.* (Hart.)

Démonstration. Prenons sur chacune des trois droites le centre harmonique relativement au point M ; puisque ce point est d'inflexion dans une de ces courbes, les trois

centres sont sur une même droite (théorème 2). Mais cette droite reste la même pour toutes les courbes ; donc, réciproquement, le point M est un point d'inflexion pour toutes les courbes (théorème 2).

7. Théorème. *Si, par les neuf points d'inflexion d'une ligne du troisième ordre, on fait passer une seconde courbe du même ordre, ces neuf points seront aussi les points d'inflexion de la seconde courbe.* (Hesse.)

Démonstration. Par chaque point d'inflexion passent quatre rayons renfermant chacun deux points d'inflexion (théorème 5, *observation*). On est donc ramené au théorème précédent.

Remarque. Le théorème est de M. Hesse, professeur à l'Université de Kœnigsberg, en Prusse, et il se trouve dans le beau mémoire géométrico-analytique sur les fonctions du troisième ordre. (Crelle, tomes XXVIII, XXXVII, XXXVIII.) Ce moyen ingénieux de démonstration appartient à M. Hart, professeur à l'Université de Dublin (Crelle, tome XXXIX, page 365, 1849, en français).

(*Suite.*)

THÉORÈME DE FERMAT ET MANUSCRIT ARABE

(voir t. VIII, p. 362).

Le *Journal* de M. Crelle (tome XL, 2e cahier) contient trois Mémoires arithmologiques de M. E.-E. Kummer, célèbre professeur à l'Université de Breslau. Les deux premiers Mémoires traitent de certaines classes et propriétés des nombres complexes (voir *Journal* de M. Liouville, tome XII, page 185; 1847). Le troisième Mémoire (du 29 juin 1849) est une conséquence des deux premiers, et porte ce titre :

Démonstration générale du théorème de Fermat.

savoir : *que l'équation* $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ *est insoluble en nombres entiers pour tous les exposants* λ *qui sont des nombres premiers impairs, et qui ne se trouvent pas comme facteurs dans les numérateurs des* $\frac{1}{2}(\lambda - 3)$ *premiers nombres Bernoulliens.*

Quoique, dans cet énoncé, on ne parle que de nombres entiers, la démonstration s'applique également aux nombres complexes formés avec les racines de l'unité de degré λ ; en consultant une Table des nombres Bernoulliens, on voit que les nombres premiers suivants satisfont à la condition, savoir :

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43.

Par exemple, le nombre 29 ne se rencontre pas comme facteur dans aucun des numérateurs des treize premiers nombres Bernoulliens, et ainsi des autres. Ainsi le théorème de Fermat est démontré pour tous ces nombres premiers, tandis que 37 se rencontre comme facteur dans l'un des numérateurs des dix-sept premiers nombres Bernoulliens. M. Kummer déclare que ses recherches sur les nombres complexes ne lui permettent de se prononcer ni sur la possibilité, ni sur l'impossibilité de l'équation

$$x^{37} + y^{37} = z^{37}.$$

Ainsi M. Kummer a découvert que, dans les nombres complexes formés avec les racines $\lambda^{\text{ièmes}}$ de l'unité, il existe dans leurs propriétés intimes des différences assez considérables, selon que λ, nombre premier impair, se trouve ou ne se trouve pas comme facteur dans un numérateur de l'un des $\frac{1}{2}(\lambda - 3)$ premiers nombres Bernoulliens. M. Crelle a acquis des droits à l'éternelle reconnaissance des géomètres, en accueillant et recueillant de magnifiques travaux sur la partie la plus noble, la plus géné-

reuse et la plus sublime de la science mathématique. (Voir *Note* à la fin.)

On a lieu d'être surpris que, malgré l'importance mystique qu'on attachait aux nombres dans l'école pythagoricienne et néoplatonicienne, la théorie des nombres ait fait si peu de progrès chez les Grecs, peuple de génie, et ait fait des progrès chez les Indiens, peuple réputé stationnaire. Deux causes ont peut-être contribué à ce résultat : les besoins du commerce ont créé l'arithmétique, de même que la division des champs et la construction des bâtiments ont fait naître la géométrie, surtout en Égypte. Or, chez les Grecs, les professions commerciales étaient décriées, et passaient pour des occupations serviles. Aussi ils ne cultivaient l'arithmétique qu'en vue de la musique, qui comptait parmi les arts libéraux; tandis que l'Inde a été, de temps immémorial, le théâtre d'une immense activité commerciale.

C'est à cette activité qu'on doit sans doute l'invention d'une *numération écrite*, prompte, simple, parfaite; système abrégé qui manquait totalement aux Grecs et aux Égyptiens. C'est la seconde cause, et probablement la principale. Il est même probable que ce système a été importé et propagé en Occident par des négociants israélites, longtemps avant que Fibonnaci ait rédigé et publié ce système. Il reste à expliquer pourquoi les Indiens, qui ont été si loin dans l'arithmétique, dans l'arithmologie, dans l'algèbre, se sont arrêtés si court dans la géométrie. On ne sache pas qu'ils aient eu connaissance des coniques; du moins le *Lilawatti*, le *Vija-gannita* et le *Gannita-d'hyaya* n'en parlent point : la théorie de ces courbes paraît être une création entièrement grecque.

Les Arabes ont participé aux deux civilisations indienne et grecque; ils ont cultivé avec succès les sciences de calcul et celles de l'espace.

Ainsi M. F. Wœpeke, professeur particulier à l'Université de Bonn, nous apprend (1) qu'un manuscrit arabe, composé par Aboul-Fath-Omar-ben-Ibrahim-Alkhàyâmi, et cité par Montucla, contient la construction des équations cubiques par l'intersection de deux coniques. L'auteur arabe donne le tableau de ces vingt-cinq équations, dont il s'occupe successivement.

Équations simples.

(1) $a = x$,

(2) $a = x^2$,

(3) $a = x^3$,

(4) $bx = x^2$,

(5) $bx = x^3$,

(6) $cx^2 = x^3$.

Équations composées.

(7) $x^2 + bx = a$,

(8) $x^2 + a = bx$,

(9) $bx + a = x^2$,

(10) $x^3 + cx^2 = bx$,

(11) $x^3 + bx = cx^2$,

(12) $cx^2 + bx = x^3$,

(13) $x^3 + bx = a$,

(14) $x^3 + a = bx$,

(15) $bx + a = x^3$,

(16) $x^3 + cx^2 = a$,

(17) $x^3 + a = cx^2$,

(18) $cx^2 + a = x^3$,

(19) $x^3 + cx^2 + bx = a$,

(20) $x^3 + cx^2 + a = bx$,

(21) $x^3 + bx + a = cx^2$,

(22) $cx^2 + bx + a = x^3$,

(23) $x^3 + cx^2 = bx + a$,

(24) $x^3 + bx = cx^2 + a$,

(25) $x^2, + a = cx^2 + bx$.

(*) Journal de M. Crelle, tome LX, page 160, 1850; en français.

Les équations (4-6 et 10-12) sont ramenées, par des procédés géométriques, à celles qu'on en déduit en les divisant par x et x^2. La résolution algébrique et géométrique des équations carrées ressemble à celle qui est donnée par Mohamed-ben-Mousa (*voir* tome V, page 567). M. Wœpeke a traduit tout ce qui concerne la construction des racines de l'équation (17), que l'auteur arabe effectue au moyen de l'intersection d'une hyperbole et d'une parabole. L'auteur arabe n'admet que les racines *positives*, et il considère les solutions négatives comme désignant des *impossibilités*. Le savant traducteur a mis des notes qui éclaircissent le texte. Le manuscrit appartient à la bibliothèque de Leyde. On n'en connaît pas la date précise : les deux limites sont le milieu du XIe et la fin du XIVe siècle. Montucla mentionne ce manuscrit (*Histoire des Mathématiques*, tome I, page 385), d'après la préface d'un ouvrage du célèbre Meermann (Gerard), et intitulé : *Specimen calculi fluxionalis* (1742, in-4°). A cette occasion, Montucla se plaint de ce que les mathématiciens négligent l'étude de l'arabe, et les arabistes l'étude des mathématiques. Ce reproche ne peut pas s'adresser à l'Allemagne; M. Wœpeke possède les sciences de calcul, comprend l'idiome arabe, et écrit avec clarté notre langue. La Société asiatique devrait engager et encourager ce jeune professeur à publier le texte d'*Al-khâyâmy*, avec une traduction française. C'est un nouveau service que cette illustre Société rendrait à l'érudition orientale.

Nous remarquerons que les Arabes, en empruntant aux Grecs la construction des *lieux solides*, en ont augmenté l'étendue; mais, jusqu'ici, on ne sache pas qu'ils aient connu la solution de Cardan. Toutefois les constructions géométriques peuvent amener à la solution algébrique de l'équation du quatrième degré.

En effet, soit donnée une équation du quatrième degré; on construit les racines à l'aide de l'intersection de deux coniques. Représentons les équations de ces coniques par $P=0$, $Q=0$, à l'une de ces coniques on peut substituer une troisième conique représentée par l'équation $P+\mu Q=0$, où μ est un coefficient arbitraire; et l'on détermine ce coefficient de manière que cette troisième conique se réduise à deux droites. La question est ramenée à l'intersection d'une conique et de deux droites, et, par conséquent, à une équation quadratique. Or, pour que la troisième conique représente deux droites, il faut poser $L=0$; L est l'expression $AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE + 4ACF$ rapportée à l'équation hexanôme (*). Cette détermination donne pour μ une équation du troisième degré, qui n'est autre que la *réduite* de la solution algébrique. Cette observation a été faite depuis longtemps par M. Lamé, dans son excellent Opuscule sur *Diverses méthodes géométriques* (**). Cette méthode n'est pas applicable à l'équation du troisième degré; elle conduit à une réduite aussi de ce degré. On n'a pas encore fait pour le quatrième degré ce que M. Bonniakowski a fait pour le troisième (tome IV, page 382); savoir :

Étant donnée l'équation générale

$$a_0 x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

et la résolvant par la méthode connue, comment déduit-on les trois racines lorsque a_0 devient zéro?

Note. La théorie des nombres est peu cultivée, et communément même dédaignée en France, et pour de bonnes raisons. Cette théorie ne fait pas tourner des roues, ne fait pas ouvrir des vannes, ne fait condenser ni gaz ni

(*) L est le *déterminant* de l'équation hexanôme rendue homogène.

(**) LAMÉ (G.), *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*. Paris, Vve Courcier, 1818; in-8°.

vapeur, et, ce qui est encore pis, ne sert pas aux examens; dès lors les esprits calculateurs, partout en majorité, sont en droit de demander à quoi bon étudier une théorie qui ne rapporte rien. Mon intelligence bornée ne me fournit aucune réponse à de semblables questions. Le bruit court que, par le même esprit de calcul, le prochain règlement de l'École Polytechnique *proscrira* la mécanique *rationnelle* des Lagrange, des Laplace, des Poisson, et *prescrira* la mécanique *très-industrielle* de ces messieurs. Comme je crois à la pudeur, je ne crois pas à cette nouvelle : il y a quelque malentendu. (Septembre, 26.)

BIBLIOGRAPHIE (*).

TRAITÉ DU NIVELLEMENT, COMPRENANT LA THÉORIE ET LA PRATIQUE DU NIVELLEMENT ORDINAIRE ET DES NIVELLEMENTS EXPÉDITIFS, DITS PRÉPARATOIRES OU DE RECONNAISSANCE; par *P. Breton (de Champ)*, ingénieur des ponts et chaussées. Paris, 1848, in-8°, 312 pages, et 4 planches gravées. (Ouvrage autorisé pour les bibliothèques des lycées et des colléges.)

L'art du nivellement a dû naître avec les premiers besoins des sociétés policées. On sait qu'il fut cultivé par les Grecs, et qu'il faisait partie de leur Géométrie pratique. Nous voyons, par les Lettres de Trajan à Pline, que les niveleurs de la Grèce étaient en grande réputation dans l'empire romain.

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. BACHELIER, libraire, quai des Augustins, n° 55.

Considéré au point de vue géométrique, le problème du nivellement est d'une extrême simplicité. Dès que l'on a un procédé pour déterminer exactement la différence de niveau entre deux points, dont la distance n'excède pas une certaine limite, on arrive très-facilement à comparer entre elles les hauteurs d'un nombre quelconque de points, à quelque distance qu'ils soient les uns des autres. L'instrument à l'aide duquel on mesure la différence immédiate de niveau entre deux points, porte le nom de *niveau*. On en a fait de formes très-différentes, fondés sur divers principes; mais tous n'ont pas réussi au même degré, parce que la pratique exige que le niveau soit d'une manœuvre commode, prompte et sûre. Il serait fort intéressant de savoir jusqu'à quel point les instruments dont les Grecs se servaient pour niveler, possédaient ces qualités essentielles. Par leur secours, ils étaient parvenus, d'après les témoignages de Pline l'Ancien et de Vitruve, à déterminer, avec une surprenante précision, les pentes les plus convenables pour l'écoulement des eaux. Les notions que nous avons sur ce sujet se réduisent malheureusement à fort peu de chose. Vitruve donne, il est vrai, la description du *chorobate,* le niveau le plus exact que l'on connût de son temps; mais cette description est obscure, et la figure de l'instrument est perdue. Il fait connaître les noms de deux autres niveaux appelés *dioptra* et *libra aquaria,* et les indique comme sujets à erreur, « *quod dioptræ libræque fallunt.* » L'exactitude des nivellements exécutés par les Romains est prouvée par les monuments hydrauliques qu'ils ont laissés. L'ancien aqueduc d'Arcueil avait une pente uniforme dans toute sa longueur, qui est d'un peu plus de 12 kilomètres. L'aqueduc actuel, construit au commencement du XVIIe siècle, par les ordres de Marie de Médicis, offre, sous ce rapport, de continuelles et choquantes irrégularités. On peut croire que si la pente

totale eût été strictement suffisante, cette entreprise n'aurait pas réussi entre les mains des constructeurs de cette époque. L'art du nivellement n'était plus qu'une pratique grossière et incertaine.

C'est à l'astronome Picard, l'un des premiers savants qui furent appelés à faire partie de l'Académie des Sciences, que l'on doit la renaissance de l'art de niveler. Chargé d'examiner les projets que l'on avait conçus pour amener de l'eau à Versailles, et particulièrement les eaux de la Loire, les grandes opérations qu'il eut à faire le conduisirent à inventer de nouveaux instruments bien plus précis que ceux qui étaient alors en usage, et des méthodes pour s'en servir sûrement. Habile et consciencieux observateur, les résultats obtenus par lui parurent merveilleux par leur rare exactitude. Picard avait composé un Traité du nivellement qui fut publié en 1684, après sa mort, par de la Hire.

Les succès de Picard avaient inspiré une vive émulation à ses contemporains. Mariotte, Rœmer, Huygens, la Hire se distinguèrent par l'invention d'instruments ingénieux. Le perfectionnement des niveaux fut aussi à la mode en Italie, à peu près vers la même époque. On doit à Branca, Scipio Claromontius et Riccioli, des essais plus ou moins heureux; mais l'invention la plus remarquable, et l'une des meilleures assurément qui aient été faites, fut celle du niveau à bulle d'air, par Melchisedech Thévenot, qui en publia la description en 1666, sans nom d'auteur, sous ce titre : *Machine nouvelle pour la conduite des eaux, pour les bâtiments, pour la navigation et pour la plupart des autres arts*. On la retrouve, environ quinze ans après, dans un volume in-8°, intitulé : *Recueil de voyages de M. Thévenot*, imprimé en 1682. Le niveau à bulle d'air n'est autre chose qu'un tube de verre presque cylindrique, un peu bombé vers son milieu; ses extré-

mités sont fermées hermétiquement. L'intérieur est rempli d'un liquide non susceptible de geler, ordinairement de l'alcool ou de l'éther, qui en occupe toute la capacité, sauf une petite partie qui reste vide, et paraît comme une bulle nageant à la partie supérieure du liquide. On est toujours certain que la tangente à la surface intérieure du verre, au point où cette bulle s'arrête en équilibre, est horizontale. Quand on a déterminé ce point et la direction de la tangente, on est en état de diriger horizontalement un rayon visuel avec la plus grande précision. Dans le niveau de Picard, cela se faisait par le moyen d'un fil à plomb ou perpendicule, dont la longueur ne pouvait guère excéder $1^{m},50$; ses oscillations ne s'arrêtaient qu'après un temps assez long. Le niveau de Thévenot équivaut ordinairement à un perpendicule de 15 à 20 mètres. On en construit, pour les opérations les plus délicates de la Géodésie, qui équivalent à des perpendicules de 60 à 100 mètres, et même davantage. Tout cela est renfermé sous un très-petit volume, et la bulle s'arrête promptement et presque toujours sans osciller.

Le haut mérite de cet instrument ne fut toutefois reconnu que beaucoup plus tard, quoique R. Hooke l'eût signalé en Angleterre dès l'année 1674. (*Lectiones cutlerianæ*, Londres, 1679, in-4°. Voir, dans ce Recueil, le Mémoire intitulé : *Animadversions on the first part of the Machina cœlestis*, etc.) L'ingénieur français Chezy enseigna les moyens de rendre régulière la surface intérieure des tubes de verre (*Mémoire des Savants étrangers, Académie des Sciences*, tome V, 1768). A partir de ce moment, le niveau à bulle d'air se répandit chaque jour davantage. La faveur qui s'attachait encore au niveau de Picard, n'était plus qu'une tradition née de la réputation justement acquise par son auteur, mais elle ne pouvait durer en présence de l'instrument de Thévenot,

perfectionné par Chezy et Ramsden. Pendant que l'abbé Para, en 1780, cherchait à le rendre d'une manœuvre moins lente et moins difficile (2[e] édition du *Traité du nivellement* de Picard, et *Traité du nivellement* de Lespinasse), on ne s'en servait déjà plus. Les procédés pratiques de l'art étaient entièrement changés.

Ces nouvelles méthodes étaient en usage depuis une trentaine d'années sans avoir été décrites, lorsque parut, en 1805, l'*Essai sur le nivellement*, ouvrage anonyme de Busson-Descars, ingénieur des ponts et chaussées. Ce n'était, au dire de l'auteur, que le programme d'un Traité complet qu'il se proposait de publier; mais on y trouvait, pour la première fois, les nouvelles règles du nivellement. Aussi fut-il, dans les principaux Recueils de ce temps, l'objet d'éloges mérités. La publication faite à Draguignan, en 1812, d'un *Traité complet sur la théorie et la pratique du nivellement*, par Fabre, ingénieur en chef des ponts et chaussées, fut peut-être ce qui empêcha Busson-Descars de tenir sa promesse. Il se contenta de publier à Parme, en 1813, son *Traité du nivellement*, restreint à ce qui concerne l'usage du niveau d'eau. L'ouvrage de Fabre, rempli de renseignements précieux sur la pratique du nivellement, laissait à désirer sous le rapport de la description des niveaux. L'auteur, éloigné de Paris, n'avait pu sans doute se tenir au courant des perfectionnements que recevait sans cesse leur construction.

En 1820, parut le *Traité du nivellement* de J.-J. Verkaven, connu par ses éditions de l'Art de lever les plans. Ce Traité, auquel il n'avait pu mettre la dernière main, fut publié après sa mort par un ancien ingénieur, officier d'état-major, qui le compléta en y ajoutant la description, d'après le général Andréossy (*Voyage à l'embouchure de la mer Noire*), du terazi, niveau des fontainiers de Constantinople, dont les procédés sont peut-être

ceux des anciens Grecs, conservés dans l'immobilité orientale.

Le Traité de M. Breton (de Champ), publié après une longue période dans laquelle les travaux publics ont reçu d'immenses développements, a pour objet de faire connaître l'art dans son état actuel, avec tous les perfectionnements suggérés par l'expérience.

L'ouvrage est divisé en cinq livres. Dans les quatre premiers, on ne s'occupe que du nivellement ordinaire, c'est-à-dire de l'opération où le rayon visuel est horizontal. Le premier livre est consacré à l'exposition des principes. C'est la partie géométrique telle qu'on devrait l'enseigner dans les cours de mathématiques élémentaires, comme le faisait autrefois Bezout. Cette introduction ne suppose point la connaissance des niveaux. On regardera peut-être comme élégante la solution de ce problème fondamental : *Connaissant la différence de niveau de deux points a et b, et celle de b et d'un troisième point c, trouver la différence de niveau entre a et c*. L'auteur donne sous une forme très-simple, où il n'entre que des nombres ronds, l'expression de l'excès du niveau apparent sur le niveau vrai, en ayant égard à la réfraction atmosphérique. Sa théorie ne suppose point la terre sphérique; cette hypothèse, qui n'est pas conforme à la vérité, n'est pas davantage nécessaire.

C'est dans le second livre qu'on trouve le détail de la construction des instruments, et, en particulier, du niveau d'eau et du niveau à bulle et à lunette, les seuls qui soient aujourd'hui d'un usage général. Les conditions géométriques par lesquelles on assure leur exactitude, surtout pour le dernier, sont fort curieuses et méritent d'être étudiées avec soin. M. Breton (de Champ) explique, ce que personne n'avait encore fait, en quoi consiste véritablement le centrage des fils de la lunette. Les autres

niveaux sont l'objet de mentions plus ou moins étendues. Il était bon de les nommer et d'en définir le principe, ne fût-ce que pour éviter aux inventeurs des tentatives déjà faites sans succès, où ils échoueraient probablement aussi.

L'expérience a prouvé que l'on ne peut réussir dans le nivellement que moyennant une foule de précautions minutieuses (*). Le troisième livre a pour objet d'en donner non point la description complète, ce qui est impossible, mais une idée suffisante, de telle sorte que, sur le terrain, on sache bien quelles sont les choses où l'attention doit plutôt s'attacher. On y insiste avec raison sur la nécessité de faire une étude approfondie des erreurs instrumentales. Dans le quatrième livre, M. Breton fait connaître les principaux usages du nivellement, particulièrement pour la construction des voies de communication, où l'on a besoin de calculer d'avance le déblai et le remblai des terres.

Le cinquième livre contient les procédés de nivellement où l'on s'affranchit de la nécessité de se servir d'un rayon visuel exclusivement horizontal; ils conduisent à des résultats moins exacts, mais exigent moins de temps pour leur exécution. Leur caractère est d'être expéditifs, et de pouvoir servir aux études préparatoires sur le terrain et aux reconnaissances qui précèdent les études proprement dites. L'usage des clisimètres (mesureurs de pentes), les nivellements trigonométriques à petites et à grandes portées, le nivellement barométrique sont de ce nombre.

L'ouvrage est terminé par quatorze notes qui renferment une partie des matériaux de la notice placée au commencement de cet article. La note IX est relative à l'inven-

(*) En 1799, la Commission d'Égypte a assigné 9 mètres pour différence de niveau entre la mer de Suez et celle de Damiette; or, cette différence vient d'être trouvée n'être que de 3 centimètres. (*Comptes rendus*, séance du 30 septembre 1850.)



tion, par Buache, de la méthode des sections horizontales pour exprimer la forme de la surface terrestre. On croyait généralement que Buache n'avait pensé à exprimer ainsi que le fond de la mer. Mais un autre passage de cet auteur, cité par M. Breton (de Champ), montre qu'il comprenait toute l'étendue de cette méthode. Ces notes contiennent, en outre, divers renseignements sur des niveaux et des procédés de nivellement peu connus ou d'invention récente, sur le degré d'exactitude auquel on est parvenu dans le nivellement, sur la réfraction atmosphérique, etc.

Maniant avec facilité le calcul algébrique et les descriptions géométriques, ces deux puissants guides de la science, l'auteur expose et motive avec clarté les procédés de l'art, en fait ressortir les avantages et permet d'en apprécier les résultats. Il serait à désirer que le savant ingénieur voulût appliquer son précieux talent à nous donner une nouvelle édition de Bion, augmentée des instruments en vogue aujourd'hui, et élaguée de ce qui est tombé en désuétude. Ce sont là des travaux qui font honneur à l'École Polytechnique, et donnent le droit d'aspirer à son enseignement. Car, pour avoir ce droit, un titre indispensable est celui d'être connu et estimé du public savant, le seul électeur compétent. Il en est ici comme des grandes maisons de commerce, qui, pour soutenir leur réputation, ne prennent pour associés que de gros capitalistes, dont le nom a un crédit sur la place. On raconte que le grand Frédéric, cédant à d'importunes obsessions, accorda certain emploi à un sujet médiocre en mettant sur le brevet cette clause : « *Nous nommons un tel en considération des services qu'il nous rendra, s'il en est capable.* » Dans le haut enseignement, soit normal, soit polytechnique, un professeur doit être nommé en considération de ce qu'il a fait et non de ce qu'il fera.

THÉORÈME SUR LES POLYGONES SUPERPOSÉS;

PAR M. H. ROUART,
Élève du lycée Louis-le-Grand, classe de M. Beynac.

THÉORÈME. *Si l'on place l'un sur l'autre deux polygones convexes d'un même nombre de côtés, de manière que deux côtés consécutifs de l'un soient coupés par un côté de l'autre; on obtient une suite de triangles saillants; le produit des côtés extérieurs de rang impair est égal à celui des côtés de rang pair.*

Démonstration. Soit n le nombre des côtés de chaque polygone; on forme $2n$ triangles extérieurs, ayant deux à deux un angle égal comme opposé par le sommet. Désignons par $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{2n}$ les aires des triangles, par a_1, $a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ les côtés extérieurs, et par $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2n}$ les còtés intérieurs successifs; on a la suite de rapports égaux :

$$t_1 : t_2 :: a_1 b_1 : a_2 b_2,$$
$$t_2 : t_3 :: a_3 b_2 : a_4 b_3,$$
$$t_3 : t_4 :: a_5 b_3 : a_6 b_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{i-2} : t_{i-1} :: a_i b_{i-2} : a_{i+1} b_{i-1},$$
$$t_{i-1} : t_i :: a_{i+1} b_{i-1} : a_{i+2} b_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{2n} : t_1 :: a_{4n-1} b_{2n} : a_{4n} b_1.$$

Multipliant par ordre, et supprimant les facteurs communs, on obtient

$$a_1 a_3 a_5 \ldots a_{4n-1} = a_2 a_4 a_6 \ldots a_{4n}.$$

C. Q. F. D.

NOTE SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE

(voir t. IX, p. 324);

PAR M. J. MENTION.

DEUXIÈME PARTIE.

1. Feu M. Richard m'ayant demandé, à plusieurs reprises, de lui démontrer géométriquement le contact du cercle des neuf points, voici le moyen auquel je suis parvenu il y a quelque temps.

Je me propose de mener, par le milieu d'un des côtés a, un cercle tangent au système (r, α) ou (β, γ).

Soit F le pied de la bissectrice intérieure passant par le sommet A; ce pied est le centre de similitude interne du système (r, α); soient D, D' les points où (r), (α) touchent le côté a dont le milieu est M et K le pied de la hauteur relative à ce côté. On prouve aisément cette proportion : $FD.FD' = FM.FK$ (*voir* GERONO, *Annales*, tome III, page 496). Ainsi le cercle cherché passe par le pied de la hauteur. Or je choisis le milieu du côté a parce qu'il est un point de l'axe radical de chacun des systèmes (r, α), (β, γ), et me voici amené à cette question spéciale :

« Trouver la position d'une circonférence tangente à » deux circonférences données, et passant par un point » de leur axe radical. »

Cette position se fixe très-nettement en faisant usage d'une solution aussi élégante que peu connue, donnée, pour le cas général, par M. Cauchy, alors élève de l'École Polytechnique (Correspondance sur cette École, tome I, page 193), ce qui conduit au théorème suivant.

2. THÉORÈME. M, *un point de l'axe radical de deux*



cercles, O, O'; A, A' *les points de contact d'une des tangentes communes. Les points* B, B' *où les lignes* MA, MA' *coupent les cercles, sont les points où le cercle tangent à* (OA, O'A') *et passant par* M *touche les cercles.*

Le centre du cercle est situé sur la perpendiculaire abaissée de M sur la tangente commune; et si δ désigne la distance de M à cette tangente, son rayon est égal à $\frac{t^2}{2\delta}$; expression dans laquelle t est la longueur commune des tangentes menées par M aux deux cercles.

Conséquemment, revenant au triangle rectiligne de ci-dessus, la perpendiculaire abaissée de M sur tang (r, α) contient le centre du cercle passant par M tangentiellement au système (r, α); mais tang (r, α) est perpendiculaire au rayon du cercle circonscrit issu du sommet A (*voir* 1re partie, corollaire 3). Donc cette perpendiculaire est un rayon du cercle des neuf points. En voilà plus qu'il n'en faut pour établir l'identité du cercle cherché et de celui des neuf points.

Ce procédé, appliqué aux trois systèmes où entre le cercle r, donne le théorème suivant :

Les droites qui joignent les milieux des côtés aux points de contact de tang (α, r), (β, r), (γ, r) *avec le cercle inscrit se coupent en un même point de ce cercle;*

Et trois autres théorèmes analogues relatifs aux cercles ex-inscrits.

3. *Axes radicaux des systèmes* (r, α), (β, γ).... Ces six axes sont les parallèles menées par les milieux des côtés du triangle aux six bissectrices. Ainsi les parallèles aux bissectrices externes se coupent au centre radical (z) du système (α, β, γ); les parallèles à la bissectrice interne d'un sommet et aux bissectrices externes des deux autres sommets, se coupent en des points z', z'', z''', centres radicaux des trois systèmes (r, α, β). *De sorte que*

ces quatre centres radicaux sont les centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits au triangle formé par les milieux des côtés du triangle proposé.

Je terminerai par les deux énoncés suivants :

Théorème. *Par les points où le cercle inscrit touche les côtés, menez des parallèles aux bissectrices externes des sommets opposés à ces côtés; le triangle ainsi formé et le triangle $z'z''z'''$ ont pour centre de similitude le point de contact du cercle inscrit et de celui des neuf points.*

Théorème. *Par les points où l'un des trois cercles ex-inscrits (α) touche les prolongements des côtés, menez des parallèles aux bissectrices externes des sommets opposés à ces côtés, et une parallèle à la bissectrice interne du troisième sommet par le dernier point de contact; le triangle ainsi formé et le triangle $zz''z'''$ ont pour centre de similitude le point de contact du cercle ex-inscrit (α) et de celui des neuf points.*

NOTE SUR LES INTÉRÊTS COMPOSÉS;

Par M. E. BRASSINE.

1°. Si l'on désigne par c un capital, et par r l'intérêt de 1 franc par an, le capital composé au bout du temps t sera

$$C = c(1+r)^t.$$

La somme S des intérêts composés sera

$$S = c(1+r)^t - c = c(k-1),$$

en faisant $(1+r)^t = k$. Mais le capital primitif c rapporterait dans un an un intérêt p, qu'on trouverait par la

relation $p = c . r$; d'où

$$c = \frac{p}{r}:$$

par suite,

$$S = \frac{p}{r}(k - 1).$$

Cette formule exprime aussi une somme de payements annuels, augmentés de leurs intérêts composés. Si donc on veut trouver le payement annuel qui pourrait éteindre un capital a placé pendant t années, à intérêt composé, on aura la relation

$$\frac{p}{r}(k - 1) = ak;$$

d'où

$$p = \frac{akr}{k - 1}.$$

Ce procédé était employé par mon ancien professeur, M. Serres, pour résoudre le problème des annuités, sans le secours des progressions.

2°. Si, pour éteindre une dette a, on voulait faire des payements annuels, p, $2p$, $3p$,..., tp, la détermination de p exigerait la sommation de la suite

$$p(1 + r)^{t-1} + 2p(1 + r)^{t-2} + \ldots + (t - 1)p(1 + r) + tp.$$

Cette somme est équivalente à

$$p = \frac{[(1 + r)^{t+1} - 1 - r - t]}{r}.$$

3°. Il serait naturel de supposer, dans les questions d'annuités, que le taux de l'intérêt varie d'une année à l'autre. Supposons que l'intérêt de 1 franc soit, la première, deuxième, troisième, etc., année, mr, $(m - 1)r$, $(m - 2)r$,..., $2r$, r. Si l'on fait un payement p chaque

année, il faudra sommer la suite :

$$p\left[\begin{array}{l}(1+mr)(1+\overline{m-1}\,r)(1+\overline{m-2}\,r)\ldots(1+r)\\ \quad+(1+\overline{m-1}\,r)(1+\overline{m-2}\,r)\ldots(1+r)\ldots\\ \quad+(1+2r)(1+r)+(1+r)+1\end{array}\right].$$

Mais en appliquant les méthodes d'Euler, relatives aux séries hypergéométriques, on réduit la somme

$$\begin{aligned}S = x + (1+r)x^2 + (1+r)(1+2r)x^3\ldots\\ + (1+r)(1+2r)\ldots(1+mr)x^m+\ldots\end{aligned}$$

à l'intégrale de l'équation linéaire

$$r\,\frac{d.\left(S.x^{\frac{1}{r}}\right)}{dx} = [S + (1+r)(1+2r)\ldots(1+\overline{m+1}\,r)^{m+1} - x]x^{\frac{1}{r}-2}.$$

Il est vrai que si l'on développe l'intégrale qui fournit la valeur de S, on retombe sur la série qu'on voulait sommer; mais le résultat, mis sous une forme intégrale, pourra permettre, dans la pratique, l'emploi de méthodes d'approximation, très-utiles dans le calcul des probabilités.

SOLUTION DU PREMIER PROBLÈME DU GRAND CONCOURS

(voir t. IX, p. 282) (*);

PAR M. L. REGRAY-BELMY,
Élève de Sainte-Barbe (élémentaires).

PROBLÈME. *Par le point* P *de deux circonférences qui se coupent on mène deux droites rectangulaires ; l'une d'elles rencontre la ligne des centres en* a, *la petite circonférence en* b *et la grande circonférence en* c ; *l'autre rencontre la ligne des centres en* a', *la petite*

(*) Les solutions couronnées seront données prochainement, en 1851.

circonférence en c' et la grande en b'. Prouver que l'on a toujours :

$$\frac{ab}{ac} = \frac{a'b'}{a'c'}.$$

Solution. Les droites bb' et cc' passent par les centres o et o'. Si l'on mène la parallèle ck à bb', rencontrant la ligne des centres en k, on a

$$\frac{ab}{ac} = \frac{bo}{ck},$$

et si l'on mène la parallèle $c'k'$ à bb', rencontrant la ligne des centres en k',

$$\frac{a'b'}{a'c'} = \frac{b'o}{c'k'}.$$

Or $c'k' = ck$, car les triangles $o'k'c'$, $o'kc$ sont égaux; donc

$$\frac{ab}{ac} = \frac{a'b'}{a'c'}.$$

C. Q. F. D.

SUR LES AIRES DES TRIANGLES RECTILIGNES OU SPHÉRIQUES

(voir t. IX, p. 278);

PAR M. J. TILLOL,
Professeur à Castres.

Déduire de la relation

$$\sin^2 p \,.\, \operatorname{tang}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tang}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tang}\frac{C}{2} = 2 \sin\frac{S}{2} \cdot \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2} \cdot \cos\frac{c}{2},$$

la formule connue

$$S = p^2 .\, \operatorname{tang}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tang}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tang}\frac{C}{2}.$$

Substituant, en place de $\sin p$, $\cos \frac{a}{2}$, $\cos \frac{b}{2}$, $\cos \frac{c}{2}$, leur développement en série, et, en place de $\sin \frac{S}{2}$, son développement dans lequel S est remplacé par $\frac{S}{R^2}$, multipliant le tout par R^2 et posant $R = \infty$, on arrive à la relation demandée.

Et plus simplement, lorsque le triangle sphérique devient infiniment petit, il se réduit à un triangle rectiligne. Dans ce cas, $\sin p = p$, $\sin \frac{S}{2} = \frac{S}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\cos \frac{b}{2}$, $\cos \frac{c}{2}$ se réduisent à l'unité. Ces diverses substitutions conduisent au résultat demandé.

THÉORÈME DE M. STEINER SUR DES AXES RECTANGULAIRES DANS LES CONIQUES.

THÉORÈME. *Par une origine fixe, prise dans le plan d'une conique, menons deux droites rectangulaires quelconques; soient a et b les portions de ces droites interceptées par la conique; x', x'' les segments de a formés au point fixe; y', y'' les segments de b formés au point fixe; la quantité* $\frac{a^2}{x'^2 x''^2} + \frac{b^2}{y'^2 y''^2}$ *est constante.*

Démonstration. Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

l'équation de la conique; axes rectangulaires et le point fixe étant pris pour origine; passant aux coordonnées po-

laires, on a

$$z^2(A\sin^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi) + z(D\sin\varphi + E\cos\varphi) + F = o.$$

Désignons par z', z'' les deux rayons vecteurs correspondants à la même valeur de φ; on aura

$$\frac{(z'-z'')^2}{z'^2 z''^2} = \frac{(z'+z'')^2 - 4z'z''}{z'^2 z''^2}$$
$$= \frac{(D\sin\varphi + E\cos\varphi)^2 - 4F(A\sin^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi)}{F^2}.$$

Remplaçant φ par $\varphi + \frac{\pi}{2}$, et désignant par z'_1, z''_1 les deux rayons vecteurs correspondants à cet angle, on aura

$$\frac{(z'_1 - z''_1)^2}{z_1'^2 z_1''^2}$$
$$= \frac{(D\cos\varphi - E\sin\varphi)^2 - 4F(A\cos^2\varphi - B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi)}{F^2};$$

ajoutant les seconds membres des deux équations, on obtient

$$\frac{D^2 + E^2 - 4AF - 4CF}{F^2},$$

quantité indépendante de φ. C. Q. F. D.

Observation. Le même théorème subsiste, dans les surfaces du second degré, pour trois axes rectangulaires, et c'est là le théorème général énoncé par M. Steiner et qui reste à démontrer.

NOTE SUR LES ESPACES INFINIS EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

La considération des bandes infinies pour démontrer des théorèmes de similitude, est employée par le célèbre

Arnauld (Antoine) dans ses *Nouveaux Éléments de Géométrie*, page 190 (in-4°; Paris, 1667), et il dit: *En voilà la preuve, dont je ne crois pas que jamais personne se soit avisé.*

Bertrand de Genève n'est donc pas le premier qui ait employé ce chanceux moyen de démonstration.

Nous remarquerons qu'Arnauld se sert du mot *anti-parallèle* dans la même acception qu'aujourd'hui (p. 212).

Dans le privilége, il est dit que c'est le sieur Claude de Beaubourg qui publie cet ouvrage sous le nom de M. D. M. G. B.; tous les bibliographes s'accordent à attribuer l'ouvrage à Arnauld, il porte d'ailleurs l'empreinte de l'esprit méthodique de Port-Royal. L'illustre théologien est né à Paris, le 6 février 1612, et est mort refugié à Bruxelles, le 8 août 1694, année de la naissance de Voltaire.

Le père Lami, oratorien, dans *les Entretiens sur les Sciences*, publiés en 1683, dit que les Nouveaux Éléments sont d'Arnauld, mais la préface est de Nicole.

THÉORÈME DE CATOPTRIQUE;

PAR M. DIEU,
Agrégé de l'Université, docteur ès sciences mathématiques, à Dijon.

Soient I, R et N un rayon de lumière qui frappe une surface en M, R le rayon réfléchi, et N la normale à la surface en M.

Soient encore (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ et (λ, μ, ν) les angles qui déterminent les directions de I, R et N par rapport à trois axes rectangulaires, et ω l'angle d'incidence (I, N) égal à l'angle de réflexion (R, N).

On trouve que :

$$\cos\alpha' = 2\cos\lambda.\cos\omega - \cos\alpha,$$
$$\cos\beta' = 2\cos\mu.\cos\omega - \cos\beta,$$
$$\cos\gamma' = 2\cos\nu.\cos\omega - \cos\gamma.$$

Si l'équation de la surface et celles de la droite (I) étaient données, on formerait facilement, d'après ces formules, les équations de la droite (R). x, y, z étant les coordonnées du point M de la surface, on a

$$dx.\cos\lambda + dy.\cos\mu + dz.\cos\nu = 0;$$

donc les formules précédentes donnent

$$dx.\cos\alpha' + dy.\cos\beta' + dz.\cos\gamma'$$
$$= -(dx.\cos\alpha + dy.\cos\beta + dz.\cos\gamma).$$

Cette formule conduit facilement à la démonstration du théorème suivant, proposé au concours d'agrégation en 1849 :

Lorsque des rayons lumineux normaux à une même surface se réfléchissent sur une surface donnée, les rayons réfléchis sont aussi normaux à une même surface.

Note. Cette proposition de Malus a été généralisée par M. Dupin; *voir* le beau Mémoire de M. Bertrand (*Journal de Mathématiques*, tome IX, page 145; 1844).

THÉORÈME DE M. JACOBI SUR UNE SÉRIE.

(Journal de M. Crelle, t. XXI, p. 13; 1840.)

---

1. Euler a démontré que l'on a

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 \ldots$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}},$$

x est quelconque, et l'on prend pour m successivement tous les nombres entiers compris entre $-\infty$ et $+\infty$; on voit que l'exposant de x est le nombre figuré dit *pentagonal*.

Voici le théorème de M. Jacobi :

Théorème.

$$(1)\quad \left[\sum_{+\infty}^{-\infty}(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}\right]^3 = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n^2+n}{2}},$$

où x est quelconque; pour m, on met tous les entiers compris entre $-\infty$ et $+\infty$, et pour n les entiers positifs entre o et ∞ ; de sorte qu'on a

$$[1-x-x^2+x^5+x^7\ldots]^3 = 1-3x+5x^3-7x^6\ldots;$$

les exposants de x, dans le second membre, sont les nombres trigonaux.

Démonstration. Faisons $a=6m+1$, $b=2n+1$; m étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, et n un nombre entier positif; avec ces conditions, on a

$$(2)\quad \sum(-1)^{\frac{a-b}{2}}b(a^2-b^2)x^{a^2+3b^2}=0 \quad (\textit{voir}\ \text{p. } 174),$$

$$\frac{a-b}{2}=3m-n,\quad \frac{a+b}{2}=3m+n+1,$$

$$a^2-b^2=4(3m-n)(3m+n+1),$$

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}}=(-1)^{3m-n}=(-1)^{m+n};$$

ainsi l'équation (2) devient

$$(3)\sum(-1)^{m+n}(2n+1)(3m-n)(3m+n+1)x^{(6m+1)^2+3(2n+1)^2}=0;$$

divisant par x^4, l'exposant de x devient

$$36m^2+12m+3(4n^2+4n);$$

mais x étant quelconque, on peut remplacer x par $x^{\frac{1}{24}}$; alors l'exposant de x devient

$$\frac{3m^2+m}{2}+\frac{n^2+n}{2},$$

et l'équation (3) devient

$$(4)\quad \sum(-1)^{m+n}(2n+1)[3(3m^2+m)-(n^2+n)]x^{\frac{3m^2+m}{2}+\frac{n^2+n}{2}}=0.$$

De là, on déduit

$$(5)\quad \frac{3\sum(-1)^m(3m^2+m)x^{\frac{3m^2+m}{2}}}{\sum(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}}=\frac{\sum(-1)^n(2n+1)(n^2+n)x^{\frac{n^2+n}{2}}}{\sum(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n^2+n}{2}}};$$

ou bien, divisant par $2x$ et multipliant ensuite par dx et intégrant, on obtient

$$\sum(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}=\sum(-1)^n(2n+1)x^{\frac{n^2+n}{2}}.\ \text{C. Q. F. D.}$$

L'illustre analyste déduit de ce qui précède les théorèmes suivants.

Théorème 1. *Soit un nombre entier p de la forme* $24n+3$, *et qui ne soit pas le triple d'un carré; si l'on décompose ce nombre de toutes les manières possibles en trois carrés, chacun de la forme* $(6m\pm1)^2$, *deux de ces carrés peuvent être égaux; supposez que l'on compte double le cas où les trois carrés sont inégaux; le nombre de décompositions répondant à trois valeurs de m, l'une paire et les deux autres impaires, ou bien toutes les trois paires, est égal au nombre de décompositions correspondant à trois valeurs en m, l'une impaire et les deux autres paires, ou les trois impaires.*

Théorème 2. *Mêmes données et mêmes décompositions que dans le théorème précédent, mais* $p = 3b^2$; *les deux nombres de décompositions égaux dans le précédent théorème ne sont plus égaux; le premier nombre surpasse le second, si b est de la forme* $\dot{4} + 1$, *et le second nombre surpasse le premier, si b est de la forme* $\dot{4} - 1$; *l'excès est égal à* $\frac{1}{3}b$, *si b est divisible par* 3, *et au nombre le plus approché de* $\frac{1}{3}b$, *lorsque b n'est pas divisible par* 3.

Théorème 3. *On peut donner à tout nombre entier la forme*

$$\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\gamma^2 + 6\delta^2,$$

où α, β, γ, δ *sont des nombres entiers.*

Observation. Le premier exemple d'une série continue à puissances croissantes, et dont les exposants forment une progression arithmétique du *second* ordre, a été donné par Euler (*Introductio in Analysin, de partitione numerorum*, § CCCXXIII; année 1748), et il en a donné une démonstration rigoureuse dans les Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg (tome IV, première partie, 1780, page 41); *voyez* aussi *Théorie des nombres* (tome III, page 128, 3e édition; 1830). M. Jacobi a fait voir que ce théorème découle de sa nouvelle théorie sur les développements des fonctions elliptiques (*Fundamenta*, § LXVI, équation 6, page 185; année 1829); dans ce même immortel ouvrage, l'auteur donne le premier exemple d'une série dont les exposants procèdent suivant la suite pentagonale égale à une série dont les exposants procèdent suivant la suite trigonale (*Fundamenta*, page 186); et il a donné ensuite de ce dernier théorème une démonstration élémentaire que nous avons ci-dessus essayé de faire connaître.

SUR LA FORMATION

De deux séries qu'on rencontre dans la dissertation suivante de M. Gauss : *Summatio quarumdam serierum singularium ;*

D'après M. le professeur E. HEINE, de Bonn.

(Journal de M. Crelle, tome XXXIX, page 288 ; 1850.)

---

1. *Principe général.* Soit

$$(1)\qquad F(x) = \sum^{\infty} A_n x^n ;$$

c'est-à-dire que $F(x)$ est développé suivant une série infinie, n prenant toutes les valeurs entières positives, comprises entre 0 et ∞. Si $F(x)$ est décomposable en facteurs, et si l'on peut développer chacun de ces facteurs en série infinie, le produit de ces séries est identiquement égal à la série (1) ; A_n, coefficient de x^n, sera donc égal à la somme des séries qui donnent x^n dans le produit des facteurs.

Ce qui suit est une application de ce principe.

2. *Lemme.*

$$\frac{1}{(1-z)(1-rz)(1-r^2 z)}\cdots = 1 + \frac{z}{1-r} + \frac{z^2}{(1-r)(1-r^2)} + \frac{z^3}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)} + \cdots$$

Démonstration. Soit

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-rz)}\cdots = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 \ldots ;$$

d'où

$$\begin{aligned} f(rz) &= (1-z) f(z) = 1 + A_1 rz + A_2 r^2 z^2 + \ldots \\ &= (1-z)(1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^4 + \ldots). \end{aligned}$$

En comparant les coefficients des puissances semblables, on trouve

$$A_1 = \frac{1}{1-r},\ A_2 = \frac{1}{(1-r)(1-r^2)} \dots$$

3. Théorème. La série

$$1 - \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots$$

est nulle lorsque n est *impair*, et lorsque n est *pair* la série est égale à

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots(1-q^{n-1}). \qquad \text{(Gauss.)}$$

Démonstration. Dans la série du *lemme*, faisons $z = x^2$ et $r = q^2$, nous obtenons

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-q^2x^2)(1-q^4x^2)} \dots = 1 + \frac{x^2}{1-q^2}$$
$$+ \frac{x^4}{(1-q^2)(1-q^4)} \dots + \frac{x^n}{(1-q^2)\dots(1-q^n)}.$$

Le premier membre se décompose en deux facteurs, savoir :

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)} \dots = 1 + \frac{x}{1-q} + \frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)} + \dots$$
$$\frac{1}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)} \dots = 1 - \frac{x}{1-q} + \frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)} \dots$$

Faisant le produit, on obtient, pour le coefficient de x^n,

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}\left[1 - \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)} - \dots\right].$$

Ainsi, lorsque n est *impair*, le facteur enfermé entre crochets est nul, et lorsque n est *pair*, on obtient (ayant

égard au coefficient A_n donné ci-dessus),

$$1-\frac{1-q^n}{1-q}+\ldots=\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^n)}$$
$$=(1-q)(1-q^3)\ldots(1-q^{n-1}).$$

C. Q. F. D.

4. Théorème. n étant un nombre entier positif, on a

$$1+\frac{(1-q^n)}{(1-q)}q^{\frac{1}{2}}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}q^{\frac{2}{2}}$$
$$+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}q^{\frac{3}{2}}+\ldots$$
$$=\left(1+q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{3}{2}}\right)\ldots\left(1+q^{\frac{n}{2}}\right).$$

(Gauss.)

Démonstration. Dans le § 2, faisons $r=q^{\frac{1}{2}}$ et $z=x$; on obtient

$$\frac{1}{(1-x)\left(1-xq^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-xq^{\frac{2}{2}}\right)}\ldots=1+\frac{x}{1-q^{\frac{1}{2}}}+\ldots$$
$$+\frac{x^n}{\left(1-q^{\frac{1}{2}}\right)\ldots\left(1-q^{\frac{n}{2}}\right)}.$$

Le premier membre se décompose en deux facteurs, savoir :

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)}\ldots=1+\frac{x}{1-q}$$
$$+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}+\ldots+\frac{x^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)},$$

$$\frac{1}{\left(1-q^{\frac{1}{2}}x\right)\left(1-q^{\frac{3}{2}}x\right)}\ldots=1+\frac{xq^{\frac{1}{2}}}{1-q}$$
$$+\frac{x^2q^{\frac{2}{2}}}{(1-q)(1-q^2)}+\ldots+\frac{x^nq^{\frac{n}{2}}}{(1-q)\ldots(1-q^n)}.$$

Faisant le produit, on obtient, pour le coefficient de x^n,

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}\left[1+\frac{1-q^n}{1-q}q^{\frac{2}{1}}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}q^{\frac{2}{2}}+\ldots\right].$$

Comparant avec le coefficient A_n ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1-q^n}{1-q}q^{\frac{1}{2}}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}q^{\frac{2}{2}}+\ldots\\
&=\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{\left(1-q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-q^{\frac{2}{2}}\right)\ldots\left(1-q^{\frac{n}{2}}\right)}\\
&=\left(1+q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{3}}\right)\ldots\left(1+q^{\frac{n}{2}}\right).
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Observation. C'est de ces deux séries que le prince des arithmologues du siècle a déduit la loi de réciprocité pour les restes quadratiques; loi qui a reçu une grande extension par les découvertes de MM. Jacobi, Dirichlet, et par les récents travaux de M. Eisenstein, jeune arithmologue célèbre dès son début, Hermite de l'Allemagne.

CORRESPONDANCE.

1. Un élève du lycée Saint-Louis nous donne communication d'une construction géométrique, fort simple, trouvée par M. Redauly, professeur à ce lycée. Il s'agit de construire deux carrés qui soient entre eux comme deux cubes donnés. Un problème général de ce genre a été résolu par M. Peyronny, aujourd'hui capitaine du Génie (*voir* tome III, page 371; 1844). Le rapport de

deux puissances semblables peut toujours être ramené au rapport de deux lignes.

2. Dans une conique à centre, la normale divisée par le diamètre perpendiculaire à cette normale, donne un quotient constant (communiqué verbalement par M. Gentil, chef d'institution); conséquence immédiate du théorème de M. Joachimsthal (*voir* tome VII, page 114).

3. M. Hément, professeur au lycée de Strasbourg, nous a adressé un tableau synoptique qui montre le parallélisme entre la théorie des figures semblables planes et des figures semblables solides.

Exemple. *Les triangles équiangles sont semblables;* son correspondant est en regard, *les tétraèdres équiangles sont semblables*. M. Hément énonce ainsi douze théorèmes, parmi lesquels nous remarquons ces deux énoncés : *deux triangles rectangles qui ont un angle aigu égal sont semblables; deux tétraèdres trirectangles qui ont un angle dièdre égal sont semblables*. Ces parallélismes sont très-utiles dans l'enseignement et s'appliquent encore à d'autres théories.

4. On sait que l'intégration des équations linéaires à coefficients constants est ramenée à la résolution d'une certaine équation. M. Jaufroid, professeur à Dijon, examine le cas connu où cette équation a des racines égales. Cette discussion ne diffère pas essentiellement de ce qu'on trouve dans les traités classiques. Nous engageons ce professeur à lire un Mémoire de M. Malmsten, écrit en français, dans le tome XXXIX du Journal de M. Crelle, sur les moyens d'obtenir l'expression de la $n^{\text{ième}}$ intégrale particulière de l'équation linéaire

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + \ldots I = 0,$$

à l'aide des $n-1$ valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ qui satisfont à cette équation. C'est ce que nous connaissons de plus sa-

tisfaisant, de plus général sur cette matière. Nous y reviendrons en 1851.

5. M. C. Peaucellier, élève au lycée Louis-le-Grand, traite de la transformation des coordonnées dans un plan, par la méthode des projections, qu'il dit, avec raison, être la plus générale. On la doit à Hachette; elle s'applique également aux coordonnées dans l'espace. Cette méthode est consignée dans plusieurs ouvrages élémentaires, entre autres dans les *Nouvelles leçons* de MM. Briot et Bouquet.

6. M. Mannheim, élève de l'École Polytechnique, fait cette belle observation sur un théorème connu : Lorsque deux sommets A et B d'un triangle ABC de grandeur constante se meuvent sur deux droites fixes Ox, Oy, le troisième sommet décrit une ellipse, et le point O, intersection des deux droites fixes, est le centre de l'ellipse. Si l'on circonscrit une circonférence au triangle formé par ces droites fixes et le côté AB dans une position quelconque, et que l'on joigne le sommet C au centre O' de cette circonférence, par la droite CO' qui rencontre la circonférence en deux points D et E, les droites OD et OE sont les directions des axes de l'ellipse; les distances CD, CE du sommet C à la circonférence sont les longueurs des demi-axes de cette ellipse.

BIOGRAPHIE.

LENTHÉRIC (PIERRE), professeur.

Il marche droit; pratique la justice; dit la vérité qui est dans son cœur; sa langue ne calomnie jamais; il ne fait point de mal à son semblable; ne verse point l'opprobre sur son prochain; dédaigne l'homme méprisable;

honore ceux qui craignent le Seigneur; tient son serment, même à son détriment. (Ps. XV.)

C'est ainsi que le Psalmiste a tracé, il y a vingt-cinq siècles, le caractère de celui dont nous allons esquisser la vie.

Dans la fertile vallée de Beziers, au nord de cette charmante ville, est située une petite commune nommée *Allignan-du-Vent*. On y trouve la simplicité, les mœurs de la campagne, mais non pas l'ignorance. Les habitants parlent *français*, distinction honorable dans une contrée où l'idiome languedocien est la langue usuelle. Il y a quelques années que l'Université renfermait plus de vingt fonctionnaires, inspecteurs, proviseurs, professeurs, etc., nés à Allignan où l'on compte à peine onze cents âmes. Existe-t-il un second village en France duquel on puisse en dire autant? Une autre singularité est que plus du quart des familles de l'endroit portent le nom lombard *Lenthéric*, devenu synonyme, dans le pays, à honneur et probité. Issues probablement d'une même souche, il n'existe pourtant entre ces familles que des parentés par alliance.

Jean-Jacques Lenthéric, bourgeois aisé de la commune, eut cinq enfants, deux garçons et trois filles, de son union avec Claire Paierq, d'Abeillan (près Allignan). L'instruction avait développé chez cette femme d'admirables qualités; d'une piété douce et éclairée, charitable avec intelligence, son nom n'est encore prononcé dans la contrée qu'avec un sentiment de vénération. Nous insistons sur ces détails, car, dans l'éducation, l'influence des mères est prépondérante. Déposer dans le cœur des enfants le germe de la vertu, y allumer la foi aux idées religieuses, est une sainte mission confiée par la Providence aux femmes. Celle-ci a parfaitement rempli une mission dont elle est, sans doute, récompensée.

D'après une sage et louable coutume, le fils aîné fut

destiné à la culture du bien paternel, qui donnait à cette famille, aux goûts simples et modestes, une honnête aisance. C'est le père du professeur actuel du Génie à Montpellier, et qui veut bien enrichir quelquefois les *Nouvelles Annales* de ses instructives communications.

Lenthéric (Pierre), le fils cadet, né le 9 février 1793, fut destiné à une profession libérale. On le confia, dès l'âge de neuf ans, à un bon curé d'un village voisin (Nisas); à douze ans, on l'envoya au collége de Beziers, alors sous la direction de son compatriote Bouchard; mais M. Crozat ayant fondé, quelques années après, un collége à Allignan, les parents rappelèrent le jeune Lenthéric auprès d'eux, et il termina à Allignan des études élémentaires assez faibles et très-incomplètes. Il sut bientôt après tout ce que ses maîtres étaient capables de lui enseigner, et s'était toujours fait distinguer par son caractère docile, son application et son intelligence.

C'est avec ce mince bagage littéraire et scientifique qu'il fut envoyé à Montpellier, à l'âge de dix-sept ans, pour étudier en médecine. C'était le temps où d'interminables guerres, soutenues pour des intérêts dynastiques, avaient rendu la conscription l'effroi des familles, qui déploraient l'ambition du souverain. Les remplacements, très-dispendieux, dépassaient les moyens ordinaires. Comme l'on voyait beaucoup partir et peu revenir, les exemptions étaient recherchées comme des rachats de la peine capitale. L'emploi de maître d'étude, souvent plus dur que le service militaire, en dispensait. C'est en juillet 1811, par l'entremise de Bouchard, son ancien principal, devenu inspecteur d'Académie, que Lenthéric fut admis, comme maître d'étude, au lycée de Montpellier. Malgré ces pénibles fonctions, il ne discontinua pas ses études médicales pour lesquelles il montrait du goût et de l'ardeur, lorsqu'une circonstance particulière

le porta vers les sciences exactes, auxquelles il était resté jusqu'ici à peu près étranger. Encontre, géomètre distingué, connu surtout par de savants Mémoires dans les *Annales de Mathématiques*, était alors professeur au lycée de Montpellier. Un jour, étant arrivé avant l'heure de la classe, le professeur aborde, dans la cour du collége, un jeune maître d'étude, le fait causer, s'informe de ses occupations, de ses projets; lui trouve de la modestie, de l'intelligence, une rectitude d'esprit peu commune, et l'engage avec bienveillance à venir le voir chez lui.

Lenthéric ne racontait jamais sans émotion la première visite du simple maître d'étude au professeur placé si haut dans l'estime et dans la considération publique. Vingt-deux ans plus tard, il devait rencontrer, dans la même maison, une jeune épouse, telle que sa digne mère aurait pu la souhaiter à son fils. Existe-t-il un plus bel éloge?

Encontre conseilla à son jeune protégé d'abandonner la médecine et de se livrer à l'étude des sciences, en lui offrant ses conseils et ses leçons. Le jeune homme accepta avec ardeur cette offre généreuse : son application et ses succès lui valurent, en 1815, le titre de professeur de mathématiques élémentaires au lycée de Montpellier, après avoir rempli, pendant cinq ans, les pénibles et ingrates fonctions de maître d'étude. Il rappelait souvent ce titre avec orgueil; c'est qu'alors, en effet, il avait développé cette vigueur de caractère et s'était livré à ce *labor improbus*, sauve-garde des passions dont aucune ne troubla une jeunesse studieuse.

En 1821 il remplit les fonctions de censeur, et fut aussi chargé de l'enseignement de la physique, qu'il professa avec le même talent que les mathématiques.

Nommé suppléant du professeur de mathématiques

transcendantes à la Faculté, il en remplit les fonctions de 1827 à 1830.

En 1830, le célèbre fondateur du journalisme mathématique en France, le vénérable M. Gergonne, étant devenu recteur, Lenthéric, longtemps son collègue, le remplaça dans la chaire de mathématiques spéciales, et suppléa la chaire d'astronomie de 1830 à 1833; cette même année, il devint professeur *titulaire* des mathématiques transcendantes à la Faculté.

« Doué d'un savoir étendu, Lenthéric connaissait toutes » les méthodes; il les avait appréciées, surtout au point » de vue de l'enseignement. Aussi son cours brillait par » l'ordre et l'enchaînement des propositions, et par l'art » avec lequel il savait resserrer chaque théorie, et la res- » treindre à sa partie essentielle pour que l'intelligence » de l'élève pût l'embrasser tout entière, en saisir l'esprit » et se la rappeler sans effort. Une fois devant des audi- » teurs, il savait oublier toute sa science pour se mettre » à leur portée, et deviner en quelque sorte, dans le re- » gard de l'élève, la difficulté qui l'arrête pour l'aplanir » immédiatement. Quiconque a suivi ses leçons n'ou- » bliera jamais la lucidité de sa parole, la netteté de son » exposition, le talent avec lequel il savait diriger les » jeunes gens et leur donner des indications pratiques; » ces conseils d'autant plus précieux, qu'on les cherche » vainement dans les livres. Ce sont ces diverses qualités » qui lui ont valu ses succès dans l'enseignement. Chaque » année sa classe fournissait aux écoles de nombreux et » bons élèves qui sont répartis aujourd'hui dans les corps » savants. Tous ont conservé un précieux souvenir de son » zèle infatigable, de ses méthodes et du talent d'exposi- » tion qui le caractérisait. »

Nous empruntons cette appréciation judicieuse d'un beau talent à une Notice de M. Roche, géomètre d'un

bel avenir, élève et successeur de Lenthéric. Parmi ses autres élèves déjà avantageusement connus dans la science, nous comptons M. l'abbé Aoust, agrégé de l'Université et professeur au lycée de Strasbourg; M. Ossian Bonnet, professeur au collége Rollin; et M. Lenthéric neveu, professeur à l'École du Génie à Montpellier. Tel était le professeur, éminent au milieu de tant d'excellents fonctionnaires qui font l'ornement de l'Université. Lorsque tant d'autres se bornent strictement aux devoirs professionnels, et, laissant dormir des talents que la Providence accorde sous bénéfice d'en user, s'engourdissent dans une honteuse inertie, Lenthéric, obéissant à de saintes convictions, trouvait toujours, dans un bien accompli, l'activité nécessaire pour un nouveau bien. Partout où il fallait une probité sévère, une intelligence éclairée, un dévouement sans bornes, c'est à Lenthéric que ses concitoyens s'adressaient. Tel il se montrait au conseil des hospices, dont il était administrateur, jusqu'à sa mort; tel on le voyait au conseil municipal, où il fut porté par le suffrage unanime de toutes les opinions, en 1830, et derechef en 1848. Les opinions les plus exagérées s'inclinaient devant la modération du sage; sa coopération n'était jamais stérile, et lui a même survécu; c'est ainsi que la cité de Montpellier exécute en ce moment un beau travail de distribution des eaux, dont la première idée appartient à Lenthéric.

Platon dit, dans sa VIIe Lettre, « que le genre hu- » main ne sera heureux que lorsqu'il sera gouverné par » de *vrais* philosophes. » On ne cite guère cette assertion que pour la critiquer, comme étant démentie par l'expérience; mais à tort, car, chez les anciens, le point de départ et d'arrivée, l'*alpha* et l'*oméga* de toute philosophie, c'est la *vertu* d'abord, et la science ensuite; tandis que chez beaucoup de nos prétendus philosophes, il y a inver-

sion et souvent même divorce. Ils se distinguent du vulgaire par l'intelligence et non par la sagesse. Platon serait complétement justifié si tous les gouvernants étaient modelés sur Lenthéric (*).

Dans la vie privée, doué d'un caractère dont rien ne troublait la sérénité, d'une humeur toujours égale, d'une extrême patience, d'une extrême indulgence pour les défauts d'autrui; il n'avait jamais que des paroles douces, sans la moindre amertume. Esprit conciliant, observateur rigoureux des moindres convenances, nullement exigeant pour lui-même, il faisait rayonner le bonheur sur tout ce qui l'entourait. Il avait épousé en secondes noces une femme dont les agréments personnels et les qualités du cœur et de l'esprit ont charmé les quinze dernières années de son existence. Lenthéric, d'un physique avantageux et d'une santé robuste, semblait destiné à une longue carrière. Par une sorte de pressentiment, il alla, pendant les vacances de 1849, visiter le foyer natal qu'il ne devait plus revoir. A son retour, des symptômes alarmants se déclarèrent subitement; le mal fit en quelques jours des progrès effrayants. Les soins affectueux et intelligents des professeurs de la célèbre Faculté, et le dévouement d'une famille éplorée, tout fut inutile. S'éteignant lentement et sans souffrance, il termina sa mission terrestre, le 19 novembre 1849, à l'âge de cinquante-six ans. Sa perte a été ressentie dans la contrée comme un deuil public. Toute la cité, dans toutes les conditions, a voulu accompagner l'homme de bien à sa dernière demeure; cortége *spontané* qui suit rarement les grands aux yeux du monde.

Il avait pour amis, Serres, savant professeur d'anatomie à la Faculté de Montpellier, qui l'a précédé de six

(1) Le Talmud dit: *N'habite pas une cité gouvernée par des savants;* il y a quelquefois du bon dans ce conseil.



mois dans la tombe; et M. Balard, célèbre chimiste, membre de l'Académie des Sciences.

Un testament olographe, trouvé parmi ses papiers, se termine par ces lignes : « *Je déclare mourir dans la religion catholique, apostolique et romaine, que les vertus de mon père et de ma mère m'ont fait aimer et respecter tout autant que les vérités qu'elle enseigne.* »

Ce peu de mots résume son caractère, toute sa vie.

Il laisse une veuve et trois enfants, dont un fils de treize ans, qui donne déjà de belles espérances.

Le Ministre de l'Intruction publique a adressé à la mère une lettre de condoléance très-flatteuse; distinction honorable, nullement sollicitée, hommage rendu aux qualités supérieures de la femme, expression officielle d'estime et de regrets du corps universitaire pour l'ancien professeur de la docte Faculté de Montpellier; titre d'honneur que la famille se transmettra pour en être toujours digne.

Ouvrages de LENTHÉRIC (Pierre).

1°. *Traité d'Arithmétique pratique,* in-8° de 105 pages. Montpellier, A. Ricard, imprimeur.

Ce Traité fut composé pour les ouvriers qui suivaient les cours fondés par l'auteur d'après les idées de M. Charles Dupin.

2°. *Manuel pratique des nouveaux Poids et Mesures*, in-8° de 86 pages avec une planche. Montpellier, 1839.

Ouvrage d'utilité publique.

3°. *Trigonométrie et Géométrie pratique;* ouvrage autorisé par le conseil royal de l'Instruction publique pour l'enseignement dans les colléges de l'Université; in-8° de 480 pages. Montpellier, 1841.

« L'auteur s'est attaché à initier le commençant à la » pratique de cette science, aux méthodes les plus » simples, aux calculs les plus courts, les plus élégants. » A travers la forme élémentaire du livre, on reconnaît » l'influence des idées générales qu'il a puisées dans les » ouvrages des grands maîtres, et cette longue habitude » de l'enseignement qui manque trop souvent aux au- » teurs d'ouvrages élémentaires. » C'est l'opinion de M. Roche, habile professeur déjà cité.

4°. Un travail sur la distribution des eaux de la ville et sur la quantité d'eau fournie par la fontaine Saint-Clément; ouvrage fort estimé et consulté par la mairie de Montpellier et par celle de Lyon. Il est épuisé.

5°. Des discours académiques et pour des distributions de prix et de rentrée de la Faculté. Le discours sur l'ensemble des sciences mathématiques, prononcé, en 1847, pour la rentrée des Facultés, fit une grande sensation.

Annales de Gergonne.

1°. *Arithmétique,* tome XI, pages 337-344 : Solution de cette question : « On écrit de suite les nombres » consécutifs 012345...9, 0123...9,..., trouver le » chiffre d'un quantième donné; » question que M. Bertrand a mise dans son *Arithmétique;*

— Tome IV, pages 265-273 : Essai sur la transformation des fractions.

2°. *Géométrie élémentaire,* tome XVI, page 120 : Théorème sur les polygones circonscrits au cercle;

— Tome XVIII, page 83 : Diviser une circonférence en trois arcs dont les cosinus soient dans un rapport donné;

— Tome XVIII, page 250 : Volume du tétraèdre en fonc-

tion de deux côtés opposés, de leur angle et de leur distance;

— Tome XX, pages 183-185: Recherche du cylindre de plus grande surface ou de plus grand volume entre tous ceux qui sont inscrits à une même sphère.

3°. *Trigonométrie*, tome XVI, pages 39-45: Sur les sommes des puissances semblables des sinus et cosinus des divisions de la circonférence;

— Tome XVIII, page 83: Division d'un arc en segments dont les cosinus soient dans un rapport donné.

4°. *Analyse algébrique*, tome XVI, page 121: Théorème. *p et q étant des nombres entiers quelconques, on a toujours*

$$1+\frac{p}{1}\cdot\frac{q}{1}+\frac{p\cdot p-1}{2}\cdot\frac{q\cdot q-1}{2}$$
$$+\frac{p\cdot p-1\cdot p-2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{q\cdot q-1\cdot q-2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots$$
$$=\frac{p+q}{1}\cdot\frac{p+q-1}{2}\cdot\frac{p+q-2}{3}\cdots;$$

— Tome XX, pages 297-299: Note sur la limite supérieure des racines positives des équations numériques;

— Tome XXI, pages 101-117: Résolution de quelques cas de l'équation binôme.

5°. *Géométrie analytique*, tome XVII, pages 366-377: Recherche du paramètre d'une section conique en fonction symétrique d'un nombre impair de rayons vecteurs et des angles qu'ils forment avec une droite fixe (Mémoire intéressant);

— Tome XVII, pages 79-83: Sur les asymptotes des courbes algébriques;

— Tome XX, pages 34-36: Lieu du centre de gravité d'un rayon vecteur de conique.

6°. *Statique*, tome XVI, page 30: Si des forces au

nombre de n, agissant sur un même point O de l'espace, sont représentées en intensité et direction par des droites OP_1, OP_2,.., OP_n, le centre M de moyenne distance des points P_1, P_2,..., P_n sera un des points de la résultante des forces, et si cette résultante est représentée en grandeur et direction par OR, on aura

$$OR = n . OM;$$

— Tome XVII, page 338 : Théorème sur deux cas d'équilibre.

7°. *Astronomie*, tome XII, pages 41-69 : Essai d'une théorie générale des mouvements apparents. (Travail remarquable que M. Lenthéric neveu complétera.)

8°. *Arithmologie*, tome XX, pages 380-382 : Le produit des trois côtés d'un triangle rectangle en nombre, est toujours divisible par 60.

O. TERQUEM.

SOLUTION D'UNE QUESTION ÉNONCÉE SUR LES AIRES DES TRIANGLES RECTILIGNES OU SPHÉRIQUES

(voir t. IX, p. 278);

PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Institution Sainte-Barbe.

Soient a, b, c les côtés ; A, B, C les angles ; p le demi-périmètre ; S l'aire d'un triangle, soit rectiligne, soit sphérique ; dans ce dernier cas S désigne l'excès sphérique : on a les deux théorèmes

$$(1) \qquad p^2 \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = S,$$

$$(2) \quad \sin' p \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{S}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$$

On demande comment on passe du second théorème au premier.

Démonstration. Dans la formule (2), p, a, b, c représentent des nombres de degrés, ou bien des longueurs d'arcs comptées dans la sphère de rayon 1.

Si l'on veut introduire des longueurs d'arcs a_1, b_1, etc., comptées dans une sphère de rayon R, on a la relation

$$a = \frac{a_1}{R};$$

et comme l'excès sphérique $= \frac{S}{R^2}$, en rapportant la surface du triangle sphérique au carré, la formule (2) est équivalente à la suivante :

$$\sin^2 \frac{p_1}{R} \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{S}{R^2} \cos \frac{a_1}{2R} \cos \frac{b_1}{2R} \cos \frac{c_1}{2R}.$$

On peut l'écrire de la manière suivante :

$$\frac{p_1^2}{R^2}\left(\frac{\sin \frac{p_1}{R}}{\frac{p_1}{R}}\right)^2 \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = \frac{S}{R^2} \cdot \frac{\sin \frac{S}{2R^2}}{\frac{S}{2R^2}} \cos \frac{a_1}{2R} \cos \frac{b_1}{2R} \cos \frac{c_1}{2R}.$$

Si l'on suppose que le rayon devienne infini, après avoir supprimé le facteur $\frac{1}{R^2}$, commun aux deux membres, cette formule devient

$$p_1^2 \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = S.$$

Observation. M. Tillol, professeur à Castres, résout la question en employant des séries (page 406).

SOLUTION DE LA QUESTION 229

(voir t. IX, p. 298);

PAR M. A. ESTIENNE,
Élève du lycée de Versailles.

Première solution par la géométrie analytique dans l'espace.

Je prends pour origine, le centre de la sphère. Soient x', y', z' les coordonnées du premier point, x'', y'', z'' celles du second point;

Soient aussi,

δ' la distance du point x', y', z' au centre de la sphère;
δ'' la distance de l'autre point au même centre;
Δ' la distance du point x', y', z' au plan polaire de l'autre point;
Δ'' la distance du point x'', y'', z'' au plan polaire du premier point;

L'équation de la sphère étant

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

celle du plan polaire du premier point sera

$$xx' + yy' + zz' = r^2,$$

et celle du plan polaire du second point sera

$$xx'' + yy'' + zz'' = r^2.$$

Appliquant alors la formule qui donne la distance d'un point à un plan, j'aurai

$$\Delta' = \frac{x''x' + y''y' + z''z' - r^2}{\sqrt{x_{''}^2 + y_{''}^2 + z_{''}^2}} \text{ et } \Delta'' = \frac{x''x' + y''y' + z''z' - r^2}{\sqrt{x_{'}^2 + y_{'}^2 + z_{'}^2}}.$$

Divisant membre à membre, j'ai

$$\frac{\Delta'}{\Delta''} = \frac{\sqrt{x_{\prime}^2 + y_{\prime}^2 + z_{\prime}^2}}{\sqrt{x_{\prime\prime}^2 + y_{\prime\prime}^2 + z_{\prime\prime}^2}},$$

ou bien enfin

$$\frac{\Delta'}{\Delta''} = \frac{\delta'}{\delta''}.$$

C. Q. F. D.

Seconde solution par la géométrie analytique plane.

Il est évident que les deux points donnés, le centre de la sphère et les deux perpendiculaires aux plans polaires, sont dans un même plan ; ce qui ramène à une question de géométrie plane, qu'on résout facilement par la comparaison de triangles semblables.

Note. MM. E. Clère, ingénieur des ponts et chaussées, et Hue (Armand), professeur d'hydrographie à Bayonne, ont aussi démontré le théorème de cette seconde manière. Que devient le théorème en remplaçant la sphère par une surface du second degré à centre? L'analyse de M. Estienne facilite cette recherche.

SOLUTION DE LA QUESTION 45

(voir t. I, p. 519);

PAR M. GUSTAVE MARQFOY,
Institution Sainte-Barbe.

Trouver le lieu des intersections successives de toutes les ellipses ayant un diamètre donné de grandeur et de position, et son conjugué donné de grandeur seulement.

Je prends l'une des ellipses correspondante à une position des deux diamètres donnés. Son équation est

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2.$$

Si l'on prend pour nouveaux axes le même axe des x et une perpendiculaire menée par l'origine pour axe des y, l'équation de l'ellipse deviendra, à l'aide des formules de transformation

$$y = \frac{y'}{\sin\theta}, \quad x = x' - y'\frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$a'^2y^2 + b'^2(x\sin\theta - y\cos\theta)^2 = a'^2b'^2\sin^2\theta,$$

ou, en développant,

$$a'^2y^2 + b'^2\sin^2\theta.x^2 + b'^2\cos^2\theta.y^2$$
$$- 2b'^2xy.\sin\theta\cos\theta = a'^2b'^2\sin^2\theta.$$

Cette équation devient, en remplaçant $\sin^2\theta$ par $\frac{1-\cos 2\theta}{2}$, $\cos^2\theta$ par $\frac{1+\cos 2\theta}{2}$, et en ordonnant,

$$b'^2(x^2+y^2-a'^2) + 2a'^2y^2$$
$$= b'^2(x^2-y^2-a'^2)\cos 2\theta + 2b'^2xy.\sin 2\theta.$$

Pour trouver le lieu des intersections successives des ellipses représentées par cette équation lorsque l'angle 2θ varie, il faut, d'après la règle ordinaire, prendre la dérivée par rapport à 2θ et éliminer cet angle entre l'équation ainsi obtenue et la première.

La dérivée est

$$b'^2(x^2-y^2-a'^2).\sin 2\theta - 2b'^2.xy\cos 2\theta = 0,$$

et l'angle θ s'élimine en élevant les deux équations au carré, et en ajoutant; on obtient ainsi

$$[b'^2(x^2+y^2-a'^2) + 2a'^2y^2]^2$$
$$= b'^4(x^2-y^2-a'^2)^2 + 4b'^4x^2y^2,$$

ou, toutes réductions faites, et en posant, pour abréger,

$$A^2 = \frac{b'^2+2a'^2}{2}, \quad B^2 = \frac{b'^2(b'^2+2a'^2)}{2(a'^2+b'^2)},$$

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

ANALOGIE ENTRE UNE QUESTION D'ALGÈBRE ET UNE QUESTION DE CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. E. BRASSINNE.

1°. Si l'on veut trouver les conditions pour que deux équations algébriques entières,

(1) $$f(x) = 0, \quad F(x) = 0,$$

aient une, deux, trois, etc., solutions communes, il suffit d'exprimer que leurs premiers membres ont un diviseur commun, du premier, du deuxième, du troisième, etc., degré. Lagrange, dans un Mémoire d'algèbre, donne un procédé élégant pour trouver les conditions qui expriment que les équations proposées ont p solutions communes. Il considère, pour cet effet, le système $f(x) + V = 0$ et $F(x) = 0$, puis il élimine x entre ces deux équations; le reste final, fonction de V, devra avoir p valeurs nulles de cette variable, si les proposées ont p solutions communes; le dernier terme de ce reste et les $(p-1)$ dérivées, par rapport à V, devront donc être nulles pour l'hypothèse $V = 0$. De plus, comme V s'ajoute au dernier terme q de $f(x)$, et que d'ailleurs V doit être égale à zéro, il suffira, en général, de chercher le commun diviseur entre $f(x)$ et $F(x)$; le reste final indépendant de x sera nul, s'il y a une solution commune; ses dérivées successives par rapport à q seront nulles, s'il y a plusieurs solutions communes.

2°. Le raisonnement de Lagrange s'applique sans difficulté au système de deux équations différentielles linéaires, dont les coefficients sont des fonctions algébriques entières de x. En effet (comme je l'ai démontré en 1842.

Mémoires de l'Académie de Toulouse), pour trouver les solutions communes entre deux équations de l'ordre $m+p$ et p de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} X_{m+p} &= \frac{d^{m+p}y}{dx^{m+p}} + A\frac{d^{m+p-1}y}{dx^{m+p-1}} + \ldots + Qy = 0, \\ X_p &= \frac{d^p y}{dx^p} + A'\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \ldots + Q'y = 0, \end{aligned}\right.$$

on pose la suite d'identités

$$\begin{aligned} X_{m+p} &= \frac{d^m(X_p)}{dx^m} + X_{m+p-1}, \\ X_{m+p-1} &= K\frac{d^{m-1}(X_p)}{dx^{m-1}} + X_{m+p-2}, \\ X_{m+p-2} &= L\frac{d^{m-2}(X_p)}{dx^{m-2}} + X_{m+p-3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

K, L, etc., étant des coefficients déterminés, de telle sorte que le terme de l'ordre le plus élevé se détruisant au premier et au second membre, les restes successifs que donneront de simples additions ou soustractions soient d'un ordre moindre d'une unité que les fonctions du premier membre. Ce procédé, appliqué aux deux équations proposées, conduira à un dernier reste fonction de x seul, qui devra être nul de lui-même si $X_{m+p}=0$ et $X_p=0$ ont une solution commune. Deux, trois, etc., solutions communes, auraient entraîné l'annulation identique d'une fonction du premier, deuxième, troisième ordre.

Pour appliquer au système proposé le procédé de Lagrange, remplaçons le dernier terme Qy du système (2) par $(Q+V)y$ et procédons à la recherche des solutions communes du système (2) ainsi modifié [on pourrait aussi ajouter la fonction arbitraire V au premier membre d'une des équations (2)]. On poursuivra l'opération jusqu'à ce

qu'on trouve un reste final, fonction de x et de V; ce reste algébrique devra donner pour V autant de valeurs nulles qu'il y a de solutions communes.

Dans les opérations successives relatives à la recherche des solutions communes entre les deux fonctions $X_{m+p} + Vy = o$ et $X_p = o$, on pourra se dispenser de prendre les dérivées par rapport à V, bien que cette quantité, par la substitution des solutions de $X_p = o$ dans $X_{m+p} + Vy = o$, soit fonction de x. Si, en effet, on faisait varier V, le résultat final serait de la forme

$$\varphi(x)\frac{d^k V}{dx^k} + \varphi_1(x)\frac{d^{k-1} V}{dx^{k-1}} + \ldots + F(x, V);$$

pour une solution commune, ce dernier reste, égalé à zéro, doit donner une valeur de V nulle; mais V étant alors égal à une fonction de x, identiquement égale à zéro, $\frac{dV}{dx}$, $\frac{d^2V}{dx^2}$, etc., seront nulles, et la condition relative à une valeur de $V = o$ sera fournie par la relation $F(x, V) = o$ dont le terme indépendant de V devra s'anéantir de lui-même. Deux, trois, etc., solutions communes donneront à $F(x, V) = o$ deux, trois racines nulles. Ce procédé est très-long dans l'application; il est intéressant en ce qu'il établit une analogie de plus entre les équations algébriques et les équations différentielles.

NOTE SUR LES CONGRUENCES;

PAR M. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté de Bordeaux.

On emploie quelquefois les expressions

$$\frac{a}{b} \equiv c \pmod{p}, \quad \frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \pmod{p},$$

sans bien les définir; ce qui laisse quelque obscurité.

Une fraction $\frac{a}{b}$, dont le dénominateur est premier à p, est dite *congrue* au nombre c pour le module p, quand on peut poser $\frac{a+pk}{b}=c$, le nombre k étant entier. Comme il suit de là que l'on a

$$bc-a=pk \quad \text{ou} \quad bc\equiv a \pmod{p},$$

on dira qu'un nombre et une fraction sont congrus, suivant le module p, quand leur différence a un numérateur divisible par p; ou bien encore, quand, en réduisant l'entier et la fraction au même dénominateur, on trouve des expressions fractionnaires dont les numérateurs sont congrus suivant le module donné.

Cette définition s'étendra à deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, dont les dénominateurs b, d sont premiers à p; elles seront congrues suivant le module p, si les fractions $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$ sont telles, que l'on ait

$$ad\equiv bc \pmod{p} \quad \text{ou} \quad ad-bc\equiv 0 \pmod{p}.$$

Cela posé, voici quelques théorèmes très-simples :

Théorème I. *Les fractions équivalentes* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$,..., *ayant pour expression réduite (irréductible)* $\frac{\alpha}{\beta}$, *sont congrues, suivant le module p (premier à* β*), à un même nombre* ξ.

Soit

$$\frac{\alpha+p\nu}{\beta}=\xi \quad \text{ou} \quad \alpha=\beta\xi-p\nu;$$

cette équation fera connaître les entiers ξ et ν, et l'on aura

$$\frac{\alpha}{\beta}\equiv\xi \pmod{p}.$$

Comme

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta},$$

il en résultera

$$a = k\alpha, \quad b = k\beta,$$

k étant entier; de là

$$k\alpha = k\beta\xi - pk\nu \quad \text{ou} \quad a = b\xi - p(k\nu),$$

ce qui donne

$$\frac{a}{b} \equiv \xi \pmod{p}.$$

On trouverait de même

$$\frac{c}{d} \equiv \xi, \quad \frac{e}{f} \equiv \xi, \ldots \pmod{p}.$$

Théorème II. *Si les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont congrues suivant le module p premier à b et à d, elles seront congrues à un même nombre suivant le module p.*

L'expression

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \pmod{p},$$

revenant à

$$ad \equiv bc \pmod{p},$$

on a

$$ad - bc \equiv 0 \pmod{p};$$

on transformera la congruence par l'addition de

$$-bd\xi + bd\xi = 0.$$

On a ainsi

$$d(a - b\xi) - b(c - d\xi) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si l'on détermine ξ, de sorte que l'on ait

$$a \equiv b\xi \pmod{p},$$

ou encore

$$\frac{a}{b} \equiv \xi \pmod{p},$$

puisque $a - b\xi$ est divisible par p, $c - d\xi$ le sera aussi; donc

$$c \equiv d\xi \pmod{p},$$

ou bien

$$\frac{c}{d} \equiv \xi \pmod{p}.$$

Ainsi les deux fractions sont congrues au même nombre ξ.

On voit que, dans ces deux théorèmes, il serait désavantageux de remplacer les mots *congruence, congrue* par *équivalence, équivalent*. Peut-être vaut-il mieux, dans tous les cas, s'en tenir aux expressions employées par M. Gauss.

ANNONCES (*).



THÉORÈME DE MAC-LAURIN
Sur les courbes algébriques planes; et conséquences géométriques du théorème analytique de M. Jacobi.

1. Théorème. *Soit une courbe algébrique de degré n; par un point* P, *pris dans le plan de la courbe, on mène une première sécante, coupant la courbe en n points* A_1, A_2, A_3,..., A_n; *et, par le même point* P, *une seconde sécante, coupant la courbe en n points* a_1, a_2, a_3,..., a_n; *par les points* A_1, A_2,..., A_n, *menant des tangentes à la courbe, qui coupent la seconde sécante en n points* α_1, α_2,..., α_n; *le centre de moyenne harmonique de ces n points, par rapport à* P, *est le même que celui des n points* a_1, a_2,..., a_n, *par rapport au même point* P.

Démonstration. Prenons le point a_n pour origine, a_nP pour axe des x, PA_n pour axe des y; si l'on conçoit que ce dernier axe se meuve parallèlement à lui-même, le point P restant sur l'axe des x, le rapport multiple

$$\frac{PA_1.PA_2...PA_n}{Pa_1.Pa_2...Pa_n}$$

reste constant. (Théorème de Newton.)

Désignant ce rapport par K, on a

$$PA_1.PA_2...PA_n = K(Pa_1.Pa_2...Pa_n);$$

prenant les logarithmes et ensuite les différentielles, on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d.PA_1}{PA_1}+\frac{d.PA_2}{PA_2}+\ldots+\frac{d.PA_n}{PA_n} \\ &=\frac{d.Pa_1}{Pa_1}+\frac{d.Pa_2}{Pa_2}+\ldots+\frac{d.Pa_n}{Pa_n}; \end{aligned}\right.$$

la valeur connue de la sous-tangente donne

$$P\alpha_1 = \frac{PA_1 d.Pa_n}{d.PA_1}, \quad P\alpha_2 = \frac{PA_2 d.Pa_n}{d.PA_2}, \ldots,$$

et de là

$$\frac{d.PA_1}{PA_1} = \frac{d.Pa_n}{P\alpha_1}, \quad \frac{d.PA_2}{PA_2} = \frac{d.Pa_n}{P\alpha_2}, \ldots.$$

Substituant dans l'équation (1), on obtient

$$d.Pa_n\left(\frac{1}{P\alpha_1} + \frac{1}{P\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{P\alpha_n}\right)$$
$$= d.Pa_1\left(\frac{1}{Pa_1} + \frac{1}{Pa_2} + \ldots + \frac{1}{Pa_n}\right),$$

car on a évidemment

$$d.Pa_1 = d.Pa_2 = d.Pa_3, \ldots.$$

Faisant tourner la première sécante autour du point P, le second membre ne change pas ; donc le premier reste constant ; et, lorsque la première sécante se confond avec la seconde, on a

$$\frac{1}{P\alpha_1} + \frac{1}{P\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{P\alpha_n} = \frac{1}{Pa_1} + \frac{1}{Pa_2} + \ldots + \frac{1}{Pa_n}.$$

C. Q. F. D.

Observation. Telle est la démonstration *directe* de Mac-Laurin, fondée sur la géométrie différentielle. La méthode *projective* fournit une démonstration immédiate. Si l'on projette à l'infini la droite $PA_1 A_2 \ldots A_n$, les tangentes menées par les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, deviennent des asymptotes, et l'on retombe sur le théorème de Newton (tome VII, pages 385 et 422).

2. *Considérations analytiques.*

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0,$$

l'une de degré m et l'autre de degré n, étant les équa-

tions de deux courbes algébriques planes, on a

$$\sum \frac{F}{\varphi' x f' y - \varphi'(y) f' x} = 0.$$

Les équations ont mn solutions communes, coordonnées des mn points d'intersection; les indices désignent des dérivées partielles, prises par rapport à la variable jointe à l'indice; le signe sommatoire s'étend aux mn solutions communes; et F est une fonction quelconque en x, y d'un degré *égal* ou *inférieur* à $m+n-3$ (*voir* tome VII, page 124).

Soient les équations de deux droites

$$(2) \qquad \begin{cases} t f' y + u f' x = p, \\ t \varphi' y + u \varphi' x = q, \end{cases}$$

t et u sont des coordonnées courantes; $f'(y)$, $f' x$, $\varphi' y$, $\varphi' x$ ont des valeurs *déterminées* par les solutions communes aux deux équations; p et q sont des fonctions entières rationnelles en x et y dont le degré ne doit pas dépasser le plus grand des deux nombres $m-2$, $n-2$; les valeurs de ces fonctions sont déterminées par les mêmes solutions simultanées; en sorte qu'on a ainsi mn couples de droites. Il est d'ailleurs évident que chaque couple de droites est parallèle au couple de tangentes menées par un point d'intersection aux deux courbes. U et T étant les coordonnées du point d'intersection d'un système de ces droites, on a

$$U = \frac{q f' y - p \varphi' y}{f' y \varphi' x - f' x \varphi' y}, \quad T = \frac{p \varphi' x - q f' y}{f' y \varphi' x - f' x \varphi' y};$$

on a ainsi mn points d'intersection, et, d'après le théorème cité,

$$\sum U = 0, \quad \sum T = 0.$$

Donc l'*origine* des coordonnées est le point de moyenne distance des mn points d'intersection du système de droites.

Telle est l'interprétation géométrique du théorème de M. Jacobi.

3. Faisons

$$\varphi(x, y) = y - ax, \quad \varphi' x = -a, \quad \varphi' y = 1;$$

on obtient

$$\mathrm{U} = \frac{p - qf'y}{af'y + f'x}, \quad \mathrm{T} = \frac{ap + qf'x}{af'y + f'x},$$

d'où

$$\sum \frac{p}{af'y + f'x} = 0, \quad \text{en faisant} \quad q = 0.$$

Si, dans l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

on remplace y par ax, on a une équation de degré m en x; désignons-la par V; et, en remplaçant y par ax dans $f'y$, l'expression $af'y + f'x$ est $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$; donc

$$\sum \frac{p}{af'y + f'x} = \sum \frac{p}{\frac{d\mathrm{V}}{dx}} = 0,$$

ce qui ramène au théorème d'Euler (t. VII, p. 118).

4. *Application géométrique*. La distance *inverse* du pied de la tangente à l'origine est exprimée par

$$\frac{f'(x)}{xf'x + yf'y};$$

x et y sont les coordonnées du point de contact. Soient $\mathrm{L}x + \mathrm{M}$ les deux derniers termes de l'équation $f = 0$; en mettant dans $f'x$, pour y sa valeur ax, cette fonction de degré $m - 1$ a la forme

$$\mathrm{L} + \mathrm{L}_1 x + \mathrm{L}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{L}_{m-1} x^{m-1}.$$

Le dénominateur $xf'x + yf'y$, par le théorème sur les *homogènes*, se réduit à une fonction en x et y de de-

gré $m - 1$; et, y étant remplacé par ax dans le dénominateur, celui-ci prend la forme

$$-mM + M_1 x + M_2 x^2 + \ldots + M_{m-1} x^{m-1};$$

opérant la division, et s'arrêtant au premier terme du quotient, on obtient

$$\frac{f'(x)}{xf'x + yf'y} = \frac{-L}{mM} + \frac{x\psi(x)}{xf'x + yf'y},$$

et ψx est une fonction entière de degré $m - 2$; remplaçant y par ax, on a

$$\sum \frac{f'x}{xf'x + yf'y} = \frac{-L}{M} + \sum \frac{\psi(x)}{f'x + af'y} = \frac{-L}{M};$$

car ψx est d'un degré inférieur au degré du dénominateur, et le signe sommatoire s'étend à tous les points d'intersection de la sécante $y - ax = 0$ avec la courbe $f(x, y) = 0$; la somme des distances *inverses* des pieds des tangentes à l'origine est donc une quantité constante; c'est le théorème de Mac-Laurin, rapporté ci-dessus, car

$$\frac{-L}{M} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pa_1} + \ldots \quad (\textit{voir}\ \S\ 1).$$

Observation. Si l'on avait écrit *analytiquement* le théorème géométrique de Mac-Laurin, on aurait obtenu tout de suite le théorème analytique d'Euler. Nouvel exemple de l'utilité de chercher dans la géométrie les indications de l'algèbre, dans celle-ci les indications de la géométrie.

5. Soient

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

les équations algébriques de trois surfaces de degré m, n, p; ces surfaces ont mnp points en commun. Par chacun de ces points, menant un plan tangent à chacune des trois surfaces qui s'y rencontrent, on a mnp systèmes

de *trois plans*. Leurs directions sont déterminées par les dérivées $f'(x), f'(y), f'(z), \varphi'(x),\ldots, \psi'(z)$, en prenant pour x, y, z les valeurs qu'elles ont aux points d'intersection.

Soient maintenant les équations des trois plans

$$\begin{aligned} uf'(x) + tf'(y) + vf'(z) &= p_1, \\ u\varphi'(x) + t\varphi'(y) + v\varphi'(z) &= p_2, \\ u\psi'(x) + t\psi'(y) + v\psi'(z) &= p_3, \end{aligned}$$

et l'on a *mnp* systèmes de trois semblables équations.

U, T, V étant les coordonnées du point d'intersection des trois plans, on a

$$[f'x\varphi'y\psi'z] = \frac{[p_1\varphi'y\psi'z]}{\text{U}} = \frac{[f'xp_2\psi'z]}{\text{T}} = \frac{[f'x\varphi'yp_3]}{\text{V}},$$

Les crochets indiquent des *déterminants*.

Chaque coordonnée est égale à une fraction dont le dénominateur commun est de degré $m+n+p-3$; si donc le numérateur est d'un degré égal ou inférieur à $m+n+p-4$, on aura

$$\sum \text{U} = \sum \text{T} = \sum \text{V} = 0;$$

car le théorème de M. Jacobi subsiste pour un nombre quelconque d'équations (*). L'interprétation géométrique est celle-ci : Chacun de ces *mnp* systèmes ternaires donne un point d'intersection; le centre de moyenne distance des *mnp* points est à l'origine des coordonnées.

6. Faisons

$$\varphi(x, y, z) = z - ax - by, \quad \psi(x, y, z) = z - a_1x - b_1y;$$

raisonnant comme ci-dessus, on trouve

$$\sum \frac{p}{\text{A}f'x + \text{B}f'y + \text{C}f'z} = 0;$$

(*) La géométrie est renfermée dans trois dimensions. L'analyse crée un monde à mille dimensions. Il existe peut-être des esprits auxquels le monde apparaît sous plus de trois dimensions.

p étant une fonction de degré $m-1$ ou moindre, A, B, C des constantes, fonctions de a, b, a_1, b_1, et le terme sommatoire s'étend aux m points communs aux deux plans et à la surface $f=0$; de là, en opérant comme ci-dessus, on obtient ce théorème.

Théorème. *Par un point fixe menant deux sécantes quelconques, rencontrant chacune en m points une surface de degré m; menant un plan tangent par chacun des m points d'intersection de la première sécante, ils coupent la seconde sécante en mn points dont le centre harmonique, pris par rapport au point fixe, est constant pour toutes les sécantes passant par l'origine, et, par conséquent, le même que le centre harmonique des m points d'intersection de la seconde sécante, pris par rapport au point fixe.*

C'est le théorème de Mac-Laurin, étendu aux surfaces, qui est d'ailleurs évident, en faisant passer un plan par les deux sécantes.

Observation. Lorsque le point fixe s'éloigne à l'infini, le centre harmonique devient le centre de moyenne distance, et le théorème prend un énoncé conforme à ce changement de nom.

NOTE HISTORIQUE SUR MAC-LAURIN.

Mac-Laurin (Colin) est né à Kilmoddan (Écosse) en 1698 (*). A l'âge de 19 ans, il fut nommé professeur à Aberdeen, et à 21 ans il publia, sur la description *organique* des courbes, un ouvrage qui étonna Newton. Dès lors, on voulait le nommer professeur à l'Université d'Édimbourg; mais Grégory (Jacques) s'y opposa, parce que

(*) *Mac* veut dire fils. Cette épithète entre dans la composition des noms propres chez les peuples sémitiques (*ben*); celtiques (*ker, mac*), au commencement du nom; et chez les peuples germaniques à la fin (*sohn*).

cette nomination diminuait son traitement. Pour lever cette difficulté, Newton se chargea de payer les honoraires du jeune professeur, et Mac-Laurin fut nommé. Il a composé des ouvrages qui ont immortalisé son nom, mais dont plusieurs ne purent être publiés qu'après sa mort. Lors de l'invasion du *prétendant* en Écosse, il fut chargé, en 1745, de fortifier la ville d'Édimbourg, et les partisans d'Edouard s'étant emparés de la ville, Mac-Laurin fut obligé de se sauver. Les fatigues et les tribulations altérèrent sa santé, et il mourut le 14 juin 1746, âgé de 48 ans.

LISTE DE SES OUVRAGES.

1. *Geometrica organica, sive Descriptio linearum curvarum universalis; auctore Colino Mac-Laurin, matheseos in collegio novo Abredonensi professore, et reg. Soc. soc.* Londini, MDCCXX, de 140 pages in-4°.

L'ouvrage est dédié à Newton, qui a accordé la permission d'imprimer le 12 novembre 1719; nous donnerons une analyse de cet ouvrage remarquable où nos géomètres ont largement puisé.

2. *Traité des fluxions*. Édimbourg, 1748; in-4°. On y trouve la série qui porte son nom, et des applications de mécanique rationnelle d'une grande fécondité. Il me semble que c'est là qu'on fait usage, pour la première fois, de la décomposition des forces accélératrices suivant trois axes rectangulaires, dont l'usage est devenu si universel. On y trouve aussi le célèbre théorème sur l'attraction d'un ellipsoïde sur un point placé à l'extrémité d'un axe principal, et toujours par la *géométrie différentielle,* à l'instar de Newton.

Cet ouvrage a été traduit en français.

3. *Exposition des decouvertes philosophiques de Newton;* Lond., 1748; in-8°, et traduit en français par

Lavirotte; Paris, 1749, in-4°, et en latin par le père Falk, jésuite; Vienne, 1761, in-4°.

4. *A Treatise of Algebra in three parts, containing :*

1°. *The fundamental rules and operations ;*

2°. *The composition and resolution of equations of all degrees ; and the different affections of their roots ;*

3°. *The application of algebra and geometry to each other to wich is added an Appendix concerning the general properties of geometrical lines.* In-8° de 502 pages.

Ce volume d'œuvres posthumes a eu plusieurs éditions; la quatrième est de 1779. Les deux premières parties ont été composées pour servir de commentaire à l'Arithmétique universelle de Newton. La première partie contient des idées extrêmement claires sur les *quantités négatives*. On y lit que *l'égalité* algébrique ne consiste pas seulement dans la *quantité*, mais aussi dans la *qualité* indiquée par les signes. Cela revient à dire que les signes sont des *adjectifs*.

La troisième partie renferme la construction des courbes en général, puis celle des coniques, leurs principales propriétés et leurs usages pour la construction des équations quadratiques et bi-quadratiques. Hormis les propriétés focales qui sont omises, on a ici, en 68 pages, ce qui est délayé ailleurs en 500 pages. Cette troisième partie, écrite en anglais ainsi que les deux premières parties, sert de préparation à l'Appendice qui est en latin, sous ce titre :

5. *Appendix de linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus*, en 63 pages. Analysant cet opuscule, un géomètre d'une compétence incontestable dit que cet ouvrage est *d'une élégance et d'une précision admirables* (*Apercu historique sur l'origine et le développement des méthodes*, page 146). Mac-Laurin a été en-

gagé à se livrer à des méditations sur les propriétés des cercles en général par la dissertation de Newton sur les courbes du troisième ordre, premier pas dans ce genre de recherches, et par un théorème général sur ces mêmes courbes, trouvé par Cotes et communiqué par Robert Smith. L'opuscule est divisé en trois sections.

La première section contient quatre théorèmes. Le premier théorème est celui qui est énoncé ci-dessus. Les deux autres théorèmes concernent les cercles et les rayons de courbure; nous y reviendrons. Le quatrième théorème est la collinéation ou situation en ligne droite *des centres des moyennes harmoniques*. C'est une généralisation d'un théorème de Cotes sur les lignes du troisième ordre. L'expression *moyenne harmonique* est de Mac-Laurin. L'appellation de centre de moyenne harmonique a été introduite par M. Poncelet (*).

La deuxième section est consacrée à des propriétés segmentaires dans les sections coniques, et la troisième contient vingt-quatre propositions sur les lignes du troisième ordre. La principale est celle-ci : *Lorsqu'un quadrilatère est inscrit dans une courbe du troisième ordre et que l'intersection des côtés opposés est aussi sur cette courbe, alors les tangentes menées par deux sommets opposés se coupent sur la courbe*. C'est la huitième proposition.

6. Fragment d'un Mémoire servant de supplément à la *Géométrie organique*. Écrit en France en 1721, adressé à la Société royale en 1732, est inséré dans les Transactions philosophiques de 1735. On y trouve le théorème général suivant.

Théorème. *Si un polygone de forme variable se meut*

(*) Journal de M. Crelle, tome III, pages 213-272, 1828; en français. Ce Mémoire, qui n'a paru qu'à l'Étranger, est presque inconnu en France. Nous le reproduirons dans ce Recueil, si l'illustre géomètre nous en donne l'autorisation.

de manière que tous ses côtés passent respectivement par autant de points fixes donnés, et que tous ses sommets, moins un, parcourent des courbes géométriques des degrés m, n, p, q,..., le sommet libre engendrera une courbe de degré $2mnpq$..., qui se réduit au degré sous-double $mnpq$..., quand tous les points fixes sont en ligne droite.

On lit dans l'*Aperçu historique* (page 150) : « Si toutes » les lignes directrices sont droites, le sommet libre du » polygone engendré est une conique ; et si le polygone est » un triangle, le théorème n'est autre que l'hexagramme » de Pascal. Ce théorème avait déjà été donné par Newton, » pour le cas où l'un des trois points par où doivent passer les trois côtés du triangle mobile était situé à l'infini (lemme 20, Ier liv. ; Principes). Mais c'est à Mac-Laurin qu'on doit son énoncé général, et d'avoir aperçu » dans ce mode de description des coniques, le beau théo- » rème qui était alors ignoré ; l'*Essai sur les coniques*, » qui en contient l'énoncé, n'ayant été retrouvé qu'en » 1779, par les soins de M. l'abbé Bossut. »

M. Poncelet a donné cette belle et simple démonstration du théorème de Mac-Laurin :

Soient m_1, m_2, m_3, ..., m_n les directrices données, de degrés m_1, m_2, ..., m_n ; p_1, p_2, p_3,..., p_{n+1} désignant les pôles, points fixes. La droite qui passe par p_1 rencontre la directrice m_1 en m_1 points ; ainsi un faisceau de m_1 droites passe par le pôle m_2 ; ce faisceau coupe la directrice m_2 en $m_1 m_2$ points ; un faisceau de $m_1 m_2$ droites passe donc par le pôle m_3, et ainsi de suite : de sorte que, par le dernier pôle p_{n+1}, passe un faisceau de $m_1 m_2 \ldots m_n$ droites qui coupent la droite qu'on a menée primitivement par p_1 en autant de points qui appartiennent à la courbe décrite par le sommet libre. Mais en menant la droite $p_1 p_{n+1}$ et faisant les constructions à rebours, on obtient $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$

droites qui rencontrent la première droite au même point p_1; donc ce point est un point multiple de l'ordre $m_1 m_2 \ldots m_n$: par conséquent, toutes les transversales passant par p_1 coupent la courbe décrite par le point libre en $2 m_1 m_2 \ldots m_n$ points; donc cette courbe est du degré marqué par ce produit. Mais si tous les pôles sont sur une même droite, le faisceau donné par la dernière construction se réduit à cette droite; les pôles p_1 et p_{n+1} deviennent des points *conjugués*, et le degré de la courbe se réduit à moitié. (*Traité des propriétés projectives*, § 539, page 332; 1822) (*).

SUR LES PROPRIÉTÉS ATTRACTIVES D'UN POLYGONE;

D'APRÈS M. LE PROFESSEUR JOACHIMSTHAL (FERDINAND).

Observation. On suppose la loi newtonienne d'attraction, et l'on prend pour unité de force attractive, l'attraction qu'exerce l'unité de masse à l'unité de distance. Toutes les dimensions sont évaluées en cette unité de distance.

1. THÉORÈME. *La base d'un triangle exerce sur le sommet opposé la même force attractive que l'arc de cercle intercepté entre les deux côtés, décrit du sommet comme centre avec un rayon égal à la distance du sommet à la base.*

Démonstration. Soient ABC un triangle, AB la base

(*) Cet ouvrage remarquable, très-rare, très-cher, très-gros, ne sera probablement jamais réimprimé. Un *Compendium* bien fait obtiendrait un grand succès. De tels travaux, s'ils étaient encouragés par le gouvernement, offriraient à nos jeunes agrégés un emploi de temps plus utile que dans l'*éternelle* composition de Traités *élémentaires* dont le besoin ne se fait souvent sentir qu'aux auteurs.

et C le sommet; CD la perpendiculaire abaissée du sommet C sur la base AB. Du point C comme centre, décrivons un arc de cercle intercepté entre les deux côtés CA, CB. Menons les rayons très-rapprochés C*e*, C*f*, et prolongeons-les respectivement jusqu'à la base en E et F; du point C comme centre, et avec le rayon CE, décrivons le petit arc de cercle EK, rencontrant CF prolongé en K. L'élément EF de la base exerce sur le sommet C une attraction $\frac{EF}{\overline{CE}^2}$ (ce rapport multiplie l'unité de force); l'élément *ef* de l'arc exerce l'attraction $\frac{ef}{\overline{Ce}^2}$: il s'agit de prouver l'égalité de ces deux rapports. Divisant le premier rapport par le second, on obtient

$$\frac{\overline{Ce}^2.EF}{\overline{CE}^2.ef}=\frac{Ce.CD.EF}{ef.CE^2}=\frac{CE}{EK}\cdot\frac{CD.EF}{CE^2}=\frac{CD.EF}{EK.CE}.$$

Or CD.EF est le double de l'aire élémentaire CEF; CE.EK est le double de l'aire du secteur élémentaire CEK : ces deux aires ne diffèrent que de l'aire EFK, infiniment petit du second ordre. Ainsi le rapport géométrique de ces aires est égal à l'unité; donc les rapports $\frac{EF}{\overline{CE}^2}$ et $\frac{ef}{\overline{Ce}^2}$ sont égaux; donc, etc.

2. Théorème. *Les attractions qu'exerce le périmètre d'un polygone convexe circonscrit à un cercle sur le centre de ce cercle, se détruisent.*

Démonstration. C'est un corollaire du théorème précédent. L'attraction du périmètre est la même que celle de la circonférence entière sur le centre.

3. *Lemme.* La distance du centre de gravité d'un arc

de cercle au centre, est une quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde.

4. Théorème. *L'attraction exercée par un arc de cercle sur le centre est égale à la corde divisée par le carré du rayon.*

Démonstration. Fixons au centre l'origine des coordonnées rectangulaires, et prenons pour axe des x le rayon qui passe par le milieu de l'arc. En décomposant chaque force attractive en deux forces, l'une agissant suivant l'axe des x, et l'autre perpendiculairement à cet axe, il est évident que le dernier système de forces est nul. ds étant l'élément de l'arc, la force attractive exercée par cet élément est $\frac{ds}{r^2}$; la composante suivant l'axe des x est $\frac{xds}{r^3}$: la somme de ces forces est donc $\frac{1}{r^3}$ S.xds. Or Sxds est égal à l'arc total multiplié par la distance de son centre de gravité au centre, ou, d'après le lemme, au rayon multiplié par la corde; donc la force attractive totale est égale à la corde divisée par le carré du rayon.

Corollaire 1. Soient r le rayon, φ l'angle formé par les deux rayons qui vont aux extrémités de l'arc; la force attractive est $\frac{2 \sin \frac{1}{2} \varphi}{r}$.

Corollaire 2. Soit un polygone convexe, inscrit dans une circonférence; abaissons du centre des perpendiculaires sur toutes les cordes, et portons sur chaque perpendiculaire, et suivant sa direction, une longueur égale à la corde respective. Si ces longueurs représentent, en grandeur et en direction, un système de forces, il est en équilibre; car, en vertu du théorème, ce système a pour résultante l'attraction de la circonférence sur le centre. Ce résultat est aussi évident par une autre considération. Un système de forces, représentées en grandeur et en direction

par les côtés du polygone, se réduit à un couple. Donc ces forces, transportées parallèlement à elles-mêmes au centre, se font équilibre. Faisant faire au système un quart de révolution, l'équilibre subsistera toujours, et les forces deviennent perpendiculaires aux cordes respectives.

Observation. A l'aide du théorème 1, on peut trouver l'attraction d'un polygone plan sur un point situé dans son plan.

Le théorème 1 est extrait du *Journal de Mathématiques* de Dublin et Cambridge, édité par M. W. Thomson; février 1848, page 94. L'éditeur dit que ce théorème, énoncé par M. Joachimsthal, se trouve déjà dans la Dynamique de Earnshaw; mais le théorème 2, restreint au triangle, est de M. Joachimsthal.

CALENDRIER DE L'UNIVERSITÉ DE DUBLIN POUR L'ANNÉE 1850, IMPRIMÉ A DUBLIN

(voir t. V, p. 515; t. VI, p. 320 et 445) (*).

Chaque année cette célèbre Université publie un *Calendrier* destiné à enregistrer les travaux de l'année (**). Le Calendrier est divisé en deux parties : la première, pagi-

(*) On lit avec un vif intérêt un Mémoire sur l'Université d'Oxford, par M. Lorrain, ancien recteur. Il est terminé par des conclusions très-remarquables et qui seront prises en haute considération lorsque la législature s'occupera d'autre chose que d'établir une manufacture d'armes tantôt pour, tantôt contre l'Université, et que le but principal sera l'*éducation* et non des babioles hiérarchiques (*Moniteur*, 23, 24, 26 et 27 septembre 1850).

(**) La collection, à partir de 1833, est en vente à Dublin chez MM. Hodges et Smith, libraires de l'Université. Les secondes parties, purement scientifiques, se vendent aussi à part.



née en chiffres arabes, contient la partie scolaire, historique et administrative. Tout le gouvernement de l'Université est confié à un chef (*provost*) et à des fellows vétérans (*senior fellows*); il y en a 7 en 1850. Voici les divers *ordres* du Collége :

1°. Le *prévôt* doit être ecclésiastique, docteur ou bachelier en théologie;

2°. Les *fellows* sont tenus d'entrer dans les ordres, trois exceptés; l'un *médecin* et les deux autres *juristes;*

3°. Les *nobles* et fils de nobles et baronnets; immatriculés sous le titre de *nobilis, filius nobilis et eques,* ils sont autorisés à prendre le degré de bachelier ès arts, *per specialem gratiam.* Il paraît qu'on n'accorde pas aux nobles de prendre les autres grades. Pourquoi pas?

4°. Les *docteurs* dans les trois facultés, de théologie, de médecine et de droit; les bacheliers en théologie et les maîtres ès arts.

Ces quatre ordres sont de droit électeurs pour nommer les deux représentants de l'Université au parlement.

5°. Bacheliers en droit civil et en médecine et bacheliers ès arts;

6°. Les fellows *ordinaires* (*fellow commoners*); ils mangent à la table des fellows (2°); ce sont des internes;

7°. Les *étudiants* (*scholars*), entretenus par des fondations;

8°. Les pensionnaires;

9°. Les *sizars* ont la table gratuite et une dispense d'inscription, mais payent une rétribution annuelle.

Voici le taux de cette rétribution annuelle :

1°. Nobles, 60ls;

2°. Fellows ordinaires, 30ls;

3°. Pensionnaires, 15ls;

4°. Sizars, 5^{ls} 1^{sh}.

Voici ce qu'on paye pour l'obtention des grades :

1°. *Bachelier ès arts :*

Noble, 60^{ls};

Socius, 17^{ls} 5^{sh};

Pensionnaire, 8^{ls} 17^{sh};

2°. Maître ès arts, 9^{ls} 16^{sh};

3°. Bachelier en médecine, 11^{ls} 15^{sh};

4°. Docteur en médecine, 22^{ls};

5°. Bachelier en droit, 11^{ls} 15^{sh};

6°. Docteur en droit, 22^{ls};

7°. Bachelier en musique, 11^{ls} 15^{sh};

8°. Docteur en musique, 22^{ls};

9°. Bachelier en théologie, 13^{ls} 15^{sh};

10° Docteur, 26^{ls}.

Parmi les ouvrages classiques indiqués, on remarque :

Les *Éléments d'Algèbre* de Lacroix;

Le *Calcul différentiel et intégral* de Lacroix;

Le Mémoire de M. Chasles sur les *cônes et cono-sphériques;*

Le *Cours de Mécanique* de M. Duhamel;

Les *Éléments de Physique* de M. Pouillet;

Et, pour l'Éthique, la *Psychologie* de M. Cousin.

On donne ensuite les noms de tous les internes, de ceux qui ont obtenu des grades, des honneurs, des prix, etc.

Cette partie contient 160 pages.

La seconde partie, paginée en chiffres romains, est intitulée : *University examination papers*. Ce sont les énoncés des questions d'examen *oral* qui ont été faites pour l'obtention de grades, en diverses facultés. Ces questions indiquent l'état de l'enseignement et permettent d'établir des comparaisons qui, pour les mathématiques, autant qu'il m'est permis d'en juger, ne sont pas à notre

avantage. Au delà de la mer, il y a esprit de progrès; l'enseignement suit la science. Chez nous, il règne un esprit stationnaire et souvent rétrograde (*). Pour pièce justificative, nous commençons par donner les énoncés du cours de M. Ingram; il porte pour inscription *Courbes et surfaces*.

1°. *a*. Si x', y', z', x'', y'', z'' sont les coordonnées *trilinéaires* de deux points dans un plan, $x' + \mu x''$, $y' + \mu y''$, $z' + \mu z''$ sont les coordonnées d'un point situé sur la droite qui joint les deux points.

Observation. Dans la méthode des *homogènes* les coordonnées d'un point sont désignées par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ ou, en abrégeant, par x, y, z (*voir* tome VII, page 1).

b. Si nous substituons dans l'équation trilinéaire d'une courbe, $x + \mu\alpha$, $y + \mu\beta$, $z + \mu\gamma$, à la place de x, y, z, la condition que l'équation en μ ait deux racines égales est l'équation du faisceau de tangentes à la courbe passant par le point α, β, γ.

c. Appliquer cette méthode au faisceau tangentiel qu'on peut mener du point α, β, à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(*) L'année prochaine, Dieu aidant, nous examinerons l'*utilisme* matérialiste qu'on veut donner pour base à l'enseignement; système d'Helvétius, déjà connu des Grecs, qui le repoussaient avec mépris, sous le nom, je crois, de *chrématisme*. Ils admettaient, au contraire, le principe généreux, désintéressé, si conforme à la dignité humaine, du καλὸν κἀγαθόν. L'Université a pour mission de maintenir ce principe, dans les sciences aussi bien que dans les lettres. Corps indépendant, elle n'obéit qu'à ses propres règlements, et n'a pas d'ordres à recevoir de la secte *utilitaire* qui domine ailleurs et fait peser despotiquement un sceptre de fer sur les études, pour les comprimer, les amener forcément à son niveau, et pour avilir le professorat théorique. L'Université n'est pas un couvent et encore moins une caserne. L'amputation territoriale de 1815 n'est-elle pas suffisamment douloureuse, fallait-il y ajouter une amputation intellectuelle? Pauvre France! *O navis, referent in mare te novi fluctus?*

2°. Un point P étant pris sur l'ellipse, on peut trouver sur la courbe trois autres points A, B, C tels, que les trois cercles osculateurs en ces points passent chacun par P; et les quatre points P, A, B, C sont sur une même circonférence.

3°. Si deux triangles sont tellement situés dans le plan d'une conique, que dans chaque triangle un sommet soit le pôle du côté opposé, relativement à la conique, les six sommets sont sur une même conique.

4°. La portion d'une tangente à une conique, mobile entre deux tangentes fixes, sous-tend un angle constant vu d'un foyer de la conique. Déduire ce théorème de la projection d'un rapport anharmonique fourni par un quadrilatère circonscrit à une conique.

5°. Une tangente mobile intercepte sur deux tangentes parallèles deux segments dont le rectangle est constant.

6°. Soit l'équation d'une conique $LM = R^2$, L, M, R sont des fonctions linéaires de x, y et μ étant un coefficient numérique variable, soient $\mu L = R$ et $\left(\frac{A + B\mu}{C + D\mu}\right) L = R$ les équations de deux droites, A, B, C, D sont des constantes; chacune de ces droites est tangente à la conique; la corde qui réunit les points de contact a pour enveloppe une conique ayant un double contact avec la conique donnée.

7°. *a*. Du point d'inflexion d'une courbe du troisième degré, on peut mener trois tangentes à la courbe; les trois points de contact sont sur une droite.

b. Par un point d'inflexion on mène une transversale qui rencontre la courbe en deux points; à chacun de ces points on mène une tangente à la courbe; les deux tangentes coupent la courbe en deux points situés sur la même droite que dessus (*a*).

8°. *a*. Tous les hyperboloïdes à une nappe qui passent par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche ont leurs

centres situés sur la ligne droite qui joint les milieux des deux diagonales du quadrilatère.

b. De là, étant données trois génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe, on peut déterminer le centre géométriquement.

9°. Deux cônes étant circonscrits à une surface de révolution du second degré, le cône passant par une de leurs courbes d'intersection, et ayant son sommet à l'un des foyers de la surface, a pour *lignes focales* les deux droites menées de ce foyer aux sommets des deux cônes.

O. TERQUEM.

ÉTUDES SUR LE BINOME DE NEWTON.

1. Soit la série

$$A = a^f + f a^{f-1} x + \frac{f.f-1}{2} a^{f-2} x^2 + \frac{f.f-1.f-2}{1.2.3} a^{f-3} x^3 + \ldots$$
$$+ F_{n-1} a^{f-n+1} x^{n-1} + F_{n-1} \frac{(f-n+1)}{n} a^{f-n} x^n + \ldots,$$

a, f, x sont des quantités quelconques, réelles ou imaginaires.

Faisons de même

$$B = a^g + g a^{g-1} x + \frac{g.g-1}{1.2} a^{g-2} x^2 + \ldots$$
$$+ G_{n-1} a^{g-n+1} x^{n-1} + G_n \frac{(g-n+1)}{n} a^{g-n} x^n + \ldots,$$

séries qu'on peut aussi écrire

$$A = a^f + F_1 a^{f-1} x + F_2 a^{f-2} x^2 + \ldots$$
$$+ F_{n-1} a^{f-n+1} x^{n-1} + F_n a^{f-n} x^n + \ldots,$$
$$B = a^g + G_1 a^{g-1} x + G_2 a^{g-2} x^2 + \ldots$$
$$+ G_{n-1} a^{g-n+1} x^{n-1} + G_n a^{g-n} x^n + \ldots,$$



on a la loi de formation

$$(n-m)F_{n-m} = (f-n+m+1)F_{n-m-1},$$
$$mG_m = (g-m+1)G_{m-1};$$

d'où l'on déduit cette relation,

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} nF_{n-m}G_m = {} & (f-n+m+1)F_{n-m-1}G_m \\ & + (g-m+1)G_{m-1}F_{n-m}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions la série A par la série B; désignons la série produite par C, et faisons

$$f+g=k,$$

on a

$$C = a^k + \left. \begin{matrix} F_1 \\ +G_1 \end{matrix} \right| a^{k-1}a + \left. \begin{matrix} F_2 \\ F_1G_1 \\ G_2 \end{matrix} \right| a^{k-2}x^2 + \ldots + T_{n-1}a^{k-n+1}x^{n-1} + T_n a^{k-n}x^n,$$

$$T_{n-1} = F_{n-1} + F_{n-2}G_1 + F_{n-3}G_2 + \ldots + F_1G_{n-2} + G_{n-1},$$
$$T_n = F_n + F_{n-1}G_1 + F_{n-2}G_2 + \ldots + F_1G_{n-1} + G_n.$$

Dans la relation (1), faisons m égal successivement à 0, 1, 2, 3, ..., n, et remarquant que $G_0 = 1$ et $G_{-1} = 0$, on obtient

$$nF_n = (f-n+1)F_{n-1},$$
$$nF_{n-1}G_1 = (f-n+2)F_{n-2}G_1 + gF_{n-1},$$
$$nF_{n-2}G_2 = (f-n+3)F_{n-3}G_2 + (g-1)F_{n-2}G_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$nG_n = (g-n+1)G_{n-1};$$

ajoutant ces équations membre à membre, on trouve

$$nT_n = (k-n+1)T_{n-1}.$$

Ainsi, la série C a la même loi de formation que la série A, et on l'obtient en remplaçant f par $f+g$ dans la série A; c'est ce qu'on exprime en écrivant

$$(2)\qquad C = A.B.$$

Observation essentielle. L'équation (2) désigne pure-

ment une identité *littéraire* entre des *séries* et ne subsiste pas d'une manière absolue pour des valeurs *numériques*; c'est-à-dire que des valeurs numériques quelconques, attribuées à a, f, g, x et substituées dans A, B, C, ne donnent pas C égale au produit AB, même d'une manière approchée : cette dernière égalité ne subsiste que lorsque les séries A, B, C sont toutes trois convergentes. Cette condition en entraîne d'autres pour les valeurs numériques et les renferme dans certaines limites.

Observation II. Lorsque f et g sont des nombres entiers positifs, les séries A, B, C deviennent des polynômes d'un nombre fini de termes, et alors l'équation (2) subsiste d'une manière absolue pour des valeurs numériques quelconques.

2. Désignons la série A par $\varphi(f)$; la relation (2) peut s'écrire ainsi :

$$\varphi(f)\varphi(f_1) = \varphi(f+f_1);$$

et de là

$$(3) \quad \varphi(f)\varphi(f_1)\varphi(f_2)\ldots\varphi(f_n) = \varphi(f+f_1+f_2+\ldots+f_n)$$

Observation. Cette démonstration de la formule fondamentale (3) due à Euler est donnée par Weingartner (*), d'après Hindenbourg.

3. Faisons $f=f_1=f_2=\ldots$, on a

$$(4) \qquad [\varphi(f)]^n = \varphi(nf),$$

n est un nombre essentiellement positif et entier.

4. Posons $f=1$, alors

$$\varphi(f)=\varphi(1)=a+x;$$

donc

$$(a+x)^n = \varphi(n),$$

relation qui démontre le binôme pour un exposant entier positif.

(*) *Lehrbuch der combinatorischen analysis*, tome II, page 24; 1801.

5. Soit $f = \frac{p}{q}$, p et q sont des nombres entiers positifs. Faisons $n = q$; alors

$$\left[\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = \varphi(p).$$

Mais, d'après le paragraphe précédent,

$$\varphi(p) = (a + x)^p;$$

donc

$$\left[\varphi\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = (a + x)^p.$$

Cela veut dire que si, dans la série A, on remplace f par $\frac{p}{q}$, et qu'on multiplie cette série $q - 1$ fois par elle-même, il ne reste qu'un nombre $p + 1$ de termes donnés par $(a + x)^p$; la dernière équation peut s'écrire ainsi,

$$(5) \qquad (a + x)^{\frac{p}{q}} = \varphi\left(\frac{p}{q}\right):$$

c'est le binôme pour le cas des exposants positifs fractionnaires.

6. On a

$$\varphi(f)\varphi(-f) = \varphi(0) = 1;$$

donc

$$\varphi(-f) = \frac{1}{\varphi(f)}.$$

Donc, f étant une fraction rationnelle, on a

$$\varphi(-f) = (a + x)^{-f},$$

binôme pour les exposants négatifs.

Observation. Ainsi, si l'on fait sur le polynôme $(a + x)^p$ les mêmes opérations que pour l'extraction de la racine d'indice q, on obtient une série infinie dont la loi de formation est celle du binôme; de même, lorsqu'on

divise l'unité par le polynôme $(a+x)^p$, on obtient la série $\varphi(-p)$.

7. Problème. *a, x étant des quantités réelles et f une fraction, ou un nombre rompu, dans quel cas la série* A *est-elle convergente?*

Solution. u_n désignant le $n^{ième}$ terme, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{f-n+1}{n+1}\,\frac{x}{a}.$$

Si $n=\infty$, ce rapport devient égal à $\frac{-x}{a}$; cette série s'approche donc de la progression géométrique qui a pour rapport $\frac{-x}{a}$ (*voir* tome VII, page 108); elle est donc convergente si $\frac{x}{a}<1$, et alors $(x+a)^f$ est la somme de la série; si x et a sont de même signe, cette somme est tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de $(x+a)^f$; et si x et a sont de signes différents, la somme reste constamment au-dessous de $(x+a)^f$; si $x=a$, la série devient

$$a^f\left[1+f+\frac{f.(f-1)}{1.2}+\frac{f.(f-1)(f-2)}{1.2.3}+\ldots\right].$$

Si f est positif, la série est convergente pour toute valeur de f comprise entre -1 et $+\infty$, car on a alors

$$1+f+\frac{f.(f-1)}{1.2}+\ldots=2^f;$$

si $x=-a$, alors la série devient

$$a^f\left(1-f+\frac{f(f-1)}{1.2}+\ldots\right),$$

série convergente pour toute valeur positive de f. Pour toute autre valeur de x, a, f, la série est divergente et n'a plus aucune somme.

COLLÉGE MILITAIRE DE LA FLÈCHE.

Il y a trois ans que nous signalions déjà un succès remarquable de cet établissement (*voir* tome VI, page 73). Trois élèves de dix-sept ans sur quatre, reçus à l'Ecole Polytechnique, dont le 1er de la liste. Si cette année nous n'avons pas à mentionner un succès aussi éclatant, cependant nous devons signaler avec empressement le résultat des concours de 1850. Un élève de dix-sept ans reçu le 44e à l'École Polytechnique, et neuf élèves sur douze admis à l'École de Saint-Cyr; ce qui est, du reste, le but spécial du Collége de la Flèche. Tous ces jeunes gens ont de dix-sept à dix-huit ans, c'est-à-dire sont les plus jeunes du concours. Si nous citons ces faits avec plaisir, c'est qu'ils nous semblent répondre victorieusement aux ennemis et aux détracteurs de ce grand établissement national, où la patrie reconnaissante récompense les services et le sang versé des pères, en la personne de leurs enfants. Pourquoi toujours démolir?

ANNONCES (*).

Traité de Trigonométrie; par M. *J.-A. Serret*, examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique; in-8° de 224 pages; 1850.

Nous en rendrons compte.

(*) Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

TABLE DES MATIÈRES

PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie et Arithmétique.

Pages.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie sphérique.

Trigonométrie et tétragonométrie planes.

Géométrie pratique.

Géométrie de l'espace.

Coniques planes.

Géométrie des lignes planes, en général.

Statique et Mécanique.

Calcul infinitésimal et fonctionnel; séries.

Physique mathématique.

Questions.

Bibliographie et Biographie.

Mélanges.

TABLE DES NOMS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms de MM. les Auteurs sont précédés d'un astérisque.)

Pages.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les neuf premiers volumes.

TOME I.

Nos.		Pages.
4 (*bis*)		123
25		247
34		395
41		396
47		519

TOME II.

60		48
61		*ib.*
78		454
79		*ib.*

TOME III.

81		40
84		256
87		376
89		*ib.*

TOME IV,

93		259

TOME V.

120		202
136		672

TOME VI.

Nos.		Pages.
140		134
141		*ib.*
145		216
148	(fonct. elliptiq.)	*ib.*
153	(géom. sphérique.)	242
165		394
167		*ib.*

TOME VII.

180		157
181	(intégral.)	*ib.*
182	(*id.*)	*ib.*
183		158
190	(géom. sphériq.)	240
192		368
193		*ib.*
195		*ib.*
196		448
198		*ib.*

TOME VIII.

199		44
205		107
209		236

TOME IX.

218	(géom. sphériq.)	11
228		298

Observation. Sur 229 questions, il en reste 38 à résoudre.

